Titlul : MATEMATICĂ - M anual pentru clasa a X-a (M1)

Redactor : prof. MIRCEA GANGA

Tehnoredactare computerizată : ing. AFRIM MIHAI GANGA

Referenţi :
conf. dr. SORIN DĂSCĂLESCU - UNIVERSITATEA BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ

prof. gr.I ION NEDELCU - COLEGIUL NAŢIONAL "MIHAI VITEAZUL" PLOIEŞTI

prof. gr.I RADU SIMION - COLEGIUL NAŢIONAL "MIHAI VITEAZUL" PLOIEŞTI

Colaboratori :
prof. dr. Sorin Rădulescu - Liceul "Aurel Vlaicu", Bucureşti
prof. Armand Martinov - Colegiul Naţional de Informatică, Bucureşti
prof. Alexandra Dumitrescu - Colegiul Naţional de Informatică, Bucureşti
prof. Ghiţă Gheorghe - Liceul "M. Eminescu", Buzău.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
GANGA, MIRCEA
Manual de matematică: clasa a X-a : profil M1 /Ganga Mircea, - Ploieşti : Mathpress, 2001
2 vol. ; cm.
ISBN 973-85055-0-X.
Vol. 1 : Algebra, - 2001. - p. - Bibliogr. - ISBN 973-85055-1-8

51

Toate drepturile asupra acestei cărţi aparţin EDITURII MATHPRESS
Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scris a EDITURII MATHPRESS.

Copyright © 2003 MATHPRESS

EDITURA MATHPRESS, PLOIEŞTI
0722745965

CUPRINS

pag.

Prefaţă 4

Bibliografie 5

Capitolul 1. Funcţii 6

1.1. Recapitulare 6

1.2. Funcţia exponenţială 46

1.3. Funcţia logaritmică 65

1.4. Funcţii trigonometrice inverse 135

1.5. Ecuaţii trigonometrice 151

Capitolul 2. Progresii 179

2.1. Progresia aritmetică 181

2.2. Progresia geometrică 190

Capitolul 3. Elemente de combinatorică 208

Capitolul 4. Polinoame 244

1.1. Polinoame de o nedeterminată 244

1.2. Ecuaţii algebrice de grad superior 283

Prefaţă

Manualul pe care-l prezentăm este destinat elevilor clasei a X-a, profil M1, fiind elaborat în conformitate cu programa şcolară. În condiţiile în care această programă conţine atât elemente din vechea programă, dar şi destule elemente noi s-a impus o abordare diferită a celor două componente. Desigur că această disjungere a programei îi interesează în primul rând pe profesorii care vor preda după acest manual. Noi am fost preocupaţi în abordarea tuturor chestiunilor de utilizatorii cei mai numeroşi, elevii de la clasele de profil M1. Pentru ei am găsit că este de osebit de util de a însoţi fiecare chestiune teoretică de una sau mai multe probleme rezolvate, oferindu-le apoi probleme propuse asemănătoare.
Chestiunile noi din actuala programă sunt abordate cu gândul la profesori în primul rând printr-o prezentare clară, însoţită de suficiente aplicaţii. Problemele propuse au răspunsuri sau indicaţii de rezolvare în funcţie de dificultatea lor. De fiecare dată unde am prezentat o listă de probleme propuse acestea au fost ordonate, pe cât a fost posibil, în funcţie de dificultatea lor.
Încheierea demonstraţiei unei propoziţii sau teoreme se realizează prin semnul ■ .
Paragrafele însoţite de semnul * sunt destinate elevilor din clasele cu patru ore de matematică săptămânal.
Aproape fiecare capitol conţine idei care oferă elevului posibilitatea unor extinderi. Elevii dotaţi au şansa de a se întâlni cu alte abordări ale unor probleme tradiţionale.

Autorul.

Bibliografie

1. Alecseev, V.M., "Elementarnaia Matematika", Vâşa şkola, Kiev, 1983.
2. Andrei, Gh., Caragea, C., Cucurezeanu I., Bordea, Gh. "Probleme de algebră", Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1993.
3. Balk, M.B., Boltianskii,V.G. "Geometria maselor", Moskva "Nauka", 1987.
4. Brânzei, D., Anita, S. "Geometrie" clasa a X-a, 1996.
5. Cohal T., Cohal E. "Geometrie", Editura Polirom, Iaşi, 1996.
6. Drăghicescu, I.C., Masgras, V. "Probleme de geometrie", Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
7. Ganga, M. "Teste de geometrie", Editura Tehnică Bucureşti + Ştiinţa Chişinău, 1992.
8. Ganga, M. "Teme şi probleme de matematică", Editura Tehnică, Bucureşti, 1991.
9. Ganga, M. "Ecuaţii şi inecuaţii", Editura Mathpress, Ploieşti, 1998.
10. Ganga, M. "Sisteme de ecuaţii în liceu", Editura Mathpress, Ploieşti, 1996.
11. Iorgulescu, E., Vasilescu, D. "Matematica. Probabilităţi", Editura Niculescu, Bucureşti, 1999.
12. Kacenovski, M.I., etc. "Geometria", Moscova "Nauka", 1982.
13. Kutepov, A., Rubanov, A. "Problems in Geometry", Mir Publishers, Moscow, 1975.
14. Năstăsescu, C., Niţă, C., Brandiburu, M., Joiţa, D. "Exerciţii şi probleme de algebră pentru clasele IX-XII", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
15. Niculescu, L. "Probleme de matematică pentru liceu - clasa a X-a", Editura Cardinal, 1998.
16. Panaitopol, L., Drăghicescu, I.C. "Polinoame şi ecuaţii algebrice", Editura Albatros, Bucureşti, 1980.
17. Simionescu, Gh.D. "Noţiuni de algebră vectorială şi aplicaţii în geometrie", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1982.
18. Smaranda D., Soare, N. "Transformări geometrice", Editura Academiei, Bucureşti, 1988.
19. Taillard, F., "Probabilités et statistique", Editions du Tricorne, C.R.M., Genève, 1977/1987.
20. Tomescu I. "Introducere în combinatorică", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1972.

I. FUNCŢII

1.1. RECAPITULARE

Noţiunea de funcţie

Vom trece succint în revistă elementele teoretice, studiate în anul precedent, legate de conceptul de funcţie.

Definiţie. Fie două mulţimi nevide A şi B. Spunem că am definit o funcţie pe mulţimea A cu valori în mulţimea B dacă printr-un procedeu oarecare facem ca **fiecărui element** $x \in A$ să-i corespundă **un singur element** $y \in B$.

O funcţie definită pe A cu valori în B se notează $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$. Uneori o funcţie se notează simbolic $A \to B$, $x \to y = f(x)$, unde y este imaginea elementului x din A prin funcţia f.

În loc de funcţie se utilizează şi termenul de aplicaţie.

Trei elemente definesc o funcţie:

1) A = **domeniul de definiţie**;
2) B = **mulţimea de valori ale** lui f sau **codomeniul**;
3) **legea** f care leagă cele două mulţimi.

O funcţie $f : A \to B$ se numeşte **numerică** dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Graficul unei funcţii

Fie $f : A \to B$ o funcţie.

Definiţie. Se numeşte **graficul** funcţiei f mulţimea de cupluri
$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid x \in A,\ y = f(x)\}.$$

Este uşor de văzut că $G_f \subseteq A \times B$.
Dacă f este o **funcţie numerică**, atunci $G_f \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se poate reprezenta geometric prin planul raportat la un reper cartezian, înseamnă că graficul unei funcţii numerice se reprezintă geometric printr-o submulţime a planului. Numim această submulţime **reprezentarea geometrică** a graficului funcţiei f sau pe scurt (prin abuz de limbaj) **graficul funcţiei** f.

Funcţii egale

Definiţie. Fie $f : A \to B$, $g : C \to D$, două funcţii.
Spunem că funcţiile f, g sunt egale (şi scriem $f = g$) dacă:
1) $A = C$ (**domeniile lor sunt egale**);
2) $B = D$ (**codomeniile lor sunt egale**);
3) $f(x) = g(x)$, $(\forall)\, x \in A$ (**punctual funcţiile coincid**)

Operaţii cu funcţii

Fie A o mulţime nevidă şi $f, g : A \to \mathbb{R}$, două funcţii reale.

Definiţie. **1)** Funcţia $f + g : A \to \mathbb{R}$ definită prin
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (\forall)\, x \in A,$$
se numeşte **suma** dintre funcţia f şi funcţia g.

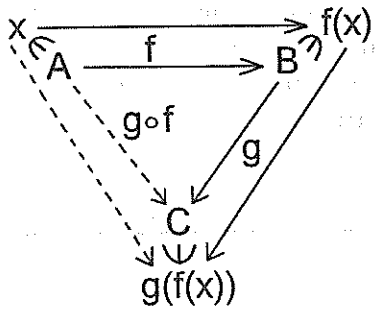
2) Funcţia $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ definită prin
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ (\forall)\, x \in A,$$
se numeşte **produsul** funcţiilor f, g.

3) Funcţia $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ definită prin
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ (\forall)\, x \in A, \text{ unde } g(x) \neq 0,\ (\forall)\, x \in A,$$
se numeşte **câtul** dintre funcţia f şi funcţia g.

Fie acum $f : A \to B$ şi $g : B \to C$.

Definiţie. Funcţia $g \circ f : A \to C$ definită prin
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ (\forall)\, x \in A,$$
se numeşte **compusa** lui g cu f.

Schema compunerii



Compunerea funcţiilor este asociativă, adică

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),\ (\forall)\, f, g, h$

astfel încât să aibă sens compunera lor.

În general compunerea funcţiilor nu este comutativă, adică nu pentru orice f, g două funcţii pentru care are sens $f \circ g$ şi $g \circ f$, $f \circ g = g \circ f$.

Funcţia identică a unei mulţimi

Fie A o mulţime.

Definiţie. Funcţia $1_A : A \to A$ definită prin

$$1_A(x) = x,\ (\forall)\, x \in A,$$

se numeşte **aplicaţia identică a mulţimii** A.

Dacă $f : B \to A$ este o funcţie oarecare atunci $1_A \circ f = f$,
iar dacă $g : A \to B$ este o funcţie arbitrară atunci $g \circ 1_A = g$.
Dacă notăm $\mathcal{F}(A) = \{f : A \to A\}$, atunci

$$f \circ 1_A = 1_A \circ f = f,\ (\forall)\, f \in \mathcal{F}(A).$$

În acest ultim caz spunem că 1_A este **element neutru** în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor din $\mathcal{F}(A)$ (Rol similar jucat de numărul 0 pentru adunarea numerelor reale sau numărul 1 pentru operaţia de înmulţire a numerelor reale).

Imaginea şi preimaginea unei funcţii

Fie $f : A \to B$ o funcţie

Definiţie. Se numeşte **imaginea funcţiei** f mulţimea notată $f(A)$ şi egală cu $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Uneori în loc de $f(A)$ se scrie $Im\, f$. Se numeşte **preimaginea funcţiei** f mulţimea notată $f^{-1}(B)$ şi egală cu $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Dacă $A' \subset A$, $A' \neq \emptyset$, atunci mulţimea elementelor $y \in B$, care sunt imaginea prin f a cel puţin unui element x din A' se numeşte **imaginea** mulţimii A' prin f şi se notează cu $f(A')$. Deci

$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} = \{y \in B \mid (\exists)\, x \in A'$ astfel încât $y = f(x)\}$.

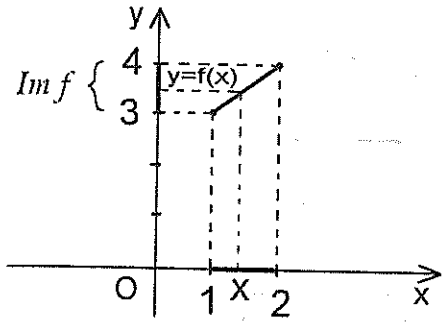
Dacă $B' \subset B$, atunci notăm prin $f^{-1}(B')$ (citim: f la minus 1 din B') mulţimea

$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$ care se numeşte **imaginea reciprocă** a mulţimii B' prin f.

Prezentăm în continuare imaginile unor funcţii.

1. Fie $f : [1,2] \to \mathbb{R}$. $f(x) = x + 2$. Să se determine $Im\, f$.

R. Avem: $Im\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists)\, x \in [1,2]$ astfel încât $f(x) = y\}$.
Din $f(x) = y$ rezultă $x + 2 = y$ şi deci $x = y - 2$. Cum $1 \leq x \leq 2$ rezultă $1 \leq y - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 4$. Deci $Im\, f = [3,4]$.
Mai jos este redat graficul funcţiei f.



Pe axa Ox am marcat mai accentuat segmentul $[1,2]$ care este domeniul de definiţie pentru funcţie, iar pe axa Oy am accentuat segmentul $[3,4]$ care este $Im\, f$.

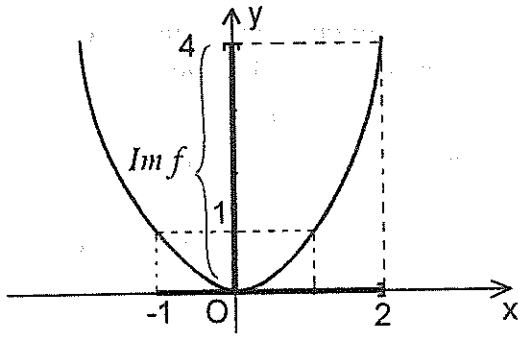
2. Fie $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$. $f(x) = x^2$. Să se determine $Im\, f$.

R. Fie $y \in Im\, f$. Deci există $x \in [-1,2]$ astfel încât $f(x) = y$, adică $x^2 = y$. De aici $y \geq 0$ şi $x = \pm\sqrt{y}$. Cum $-1 \leq x \leq 2$ se disting două cazuri:

1) $-1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq -\sqrt{y} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq y \geq 0$

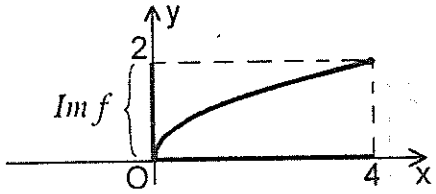
2) $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$.

Prin urmare dacă $x \in [-1,2]$, atunci $y \in [0,4]$. Deci $Im\, f = [0,4]$.
Graficul funcţiei este prezentat mai jos.



3. Se consideră funcţia $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Se cere $Im\, f$.

R. Fie $y \in Im\, f$. Deci există $x \in [0,4]$ astfel încât $f(x) = y$, adi
$\sqrt{x} = y \geq 0$. De aici $x = y^2$. Cum $0 \leq x \leq 4$ rezultă $0 \leq y^2 \leq 4$. De a
şi $y \geq 0$ rezultă $y \in [0,2]$. Aşadar $Im\, f = [0,2]$.
Graficul funcţiei este ilustrat mai jos.



Probleme propuse

Determinaţi $Im\, f$ pentru următoarele funcţii:
1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$; **2)** $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$;
3) $f : [4,9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; **4)** $f : [-8,-1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
5) $f : [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; **6)** $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;
7) $f : [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;

8) $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-3,-1] \\ 2x+3, & x \in (-1,3] \end{cases}$;

9) $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \in [-2,1] \\ \sqrt{x}, & x \in (1,3]. \end{cases}$;

Prelungirea şi restricţia unei funcţii

Dacă $f : A \to B$ şi $g : A' \to B$ sunt două funcţii cu proprietăţile
1) $A' \subset A$
2) $f(x) = g(x)$, $(\forall)\, x \in A'$,
atunci f se numeşte **prelungirea** funcţiei g la A, în timp ce g este
mită **restricţia** lui f la A'.

Funcţii monotone

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de variabilă reală şi $I \subseteq A$.

Definiţie.
1) Spunem că funcţia f este **strict crescătoare** pe I dacă:

$$\left.\begin{array}{r}(\forall) x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(Spunem că funcţia strict crescătoare "conservă" relaţia de ordine dintre argumente şi pentru valorile funcţiei în aceste puncte)

2) Spunem că funcţia f este **strict descrescătoare** pe I dacă:

$$\left.\begin{array}{r}(\forall) x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(Spunem că funcţia strict descrescătoare schimbă relaţia de ordine dintre argumente pentru valorile funcţiei).

O funcţie f **strict crescătoare** pe I sau **strict descrescătoare** pe I se numeşte **strict monotonă** pe I.

Definiţie. 1′) Spunem că funcţia f este **crescătoare** pe I dacă:

$$\left.\begin{array}{r}(\forall) x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2′) Spunem că funcţia f este **descrescătoare** pe I dacă:

$$\left.\begin{array}{r}(\forall) x_1, x_2 \in I \\ x_1 < x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

O funcţie f **crescătoare** pe I sau **descrescătoare** pe I se numeşte **monotonă** pe I.
Dacă f este **strict monotonă** (sau monotonă) pe A (pe tot domeniul de definiţie) spunem simplu că funcţia f este **strict monotonă** (sau **monotonă**) fără a mai indica mulţimea.
A studia monotonia unei funcţii $f : A \to \mathbb{R}$ revine la a preciza submulţimile lui A pe care f este strict crescătoare (sau crescătoare) şi submulţimile lui A pe care f este strict descrescătoare (sau crescătoare).
Pentru studiul monotoniei unei funcţii numerice $f : A \to \mathbb{R}$, s-a utilizat raportul $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$,

numit **raportul de variaţie** asociat funcţiei f şi numerelor x_2, x_1. Diferenţa $x_2 - x_1$ se numeşte **variaţia argumentului**, iar diferenţa $f(x_2) - f(x_1)$ se numeşte **variaţia funcţiei**. Prin urmare raportul de variaţie asociat lui f şi numerelor x_2, x_1 este raportul dintre variaţia funcţiei şi variaţia argumentului.

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie numerică şi $I \subset A$. Atunci

1) f este **strict crescătoare** (crescătoare) pe $I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > (\geq) 0, \ (\forall)\, x_1, x_2 \in I, \ x_1 \neq x_2;$$

2) f este **strict descrescătoare** (descrescătoare) pe $I \Leftrightarrow$

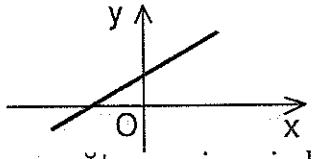
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < (\leq) 0, \ (\forall)\, x_1, x_2 \in I, \ x_1 \neq x_2.$$

Funcţiile studiate anul trecut au fost (din tabelul de valori se extrag ușor intrevalele de monotonie - în dreapta tabelului am indicat forma graficului):

1) Funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

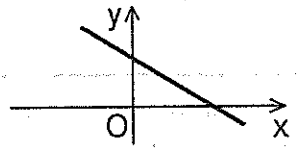
Dacă $a > 0$, atunci f este **strict crescătoare** şi am indicat această situaţie în tabelul de valori astfel:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	



Dacă $a < 0$, atunci f este **strict descrescătoare** şi s-a indicat această situaţie în tabelul de valori astfel:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

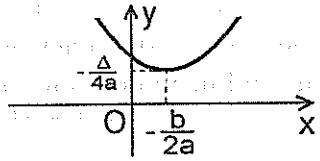


2) Funcţia de gradul al doilea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Intervalele de monotonie ale acestei funcţii sunt: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$, $[-\frac{b}{2a}, \infty)$.

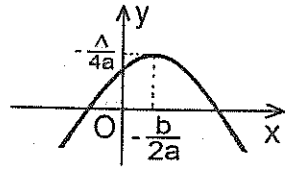
Dacă $a > 0$, atunci monotonia lui f este indicată în tabelul de valori

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	



Dacă $a < 0$, atunci tabelul de valori are forma

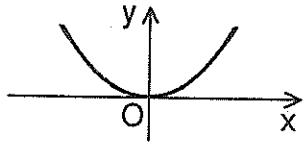
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	



3) Funcţia putere cu exponent natural, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

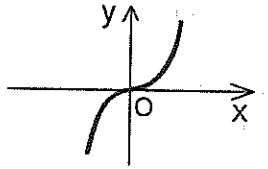
Dacă n este par, atunci tabelul de valori are forma

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Dacă n este impar, $n \neq 1$, atunci tabelul de valori are forma

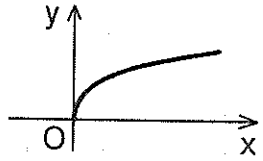
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



4) Funcţia radical de ordin n.

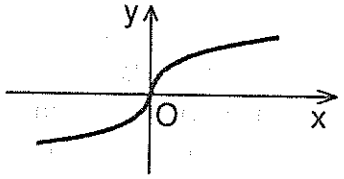
Dacă n este par atunci funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, are tabelul de valori

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Dacă n este impar atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, are tabelul de valori

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

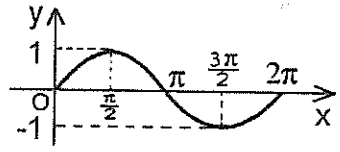


5) Funcţia sinus, notată $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = 2\pi$.

Este suficient să studiem monotonia acestei funcţii pe un interval de lungimea unei perioade principale, de exemplu $[0, 2\pi]$.

Tabelul de valori este

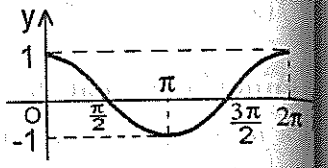
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



Deci funcţia sin este strict crescătoare pe intervalele $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
Monotonia funcţiei sin pe $\mathbb{R}$ se obţine adăugând la capetele intervalelor de mai sus multiplu de perioada principală.
Aşadar funcţia sin este strict crescătoare pe intervalele
$[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, şi strict descrescătoare pe intervalele $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
Particularizând k în fiecare din mulţimile de mai sus se obţin intervale pe care funcţia este strict crescătoare sau strict descrescătoare. De exemplu, pentru $k = 1$, funcţia sin este strict crescătoare pe intervalele
$[2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi]$, $[\frac{3\pi}{2} + 2\pi, 2\pi + 2\pi]$, iar pe intervalul $[\frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\pi]$ funcţia este strict descrescătoare.

6) Funcţia cosinus, notată $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, este o funcţie de asemenea periodică de perioadă principală $T_0 = 2\pi$.
Studiul acestei funcţii poate fi realizat pe $[0, 2\pi]$.
Tabelul de valori este

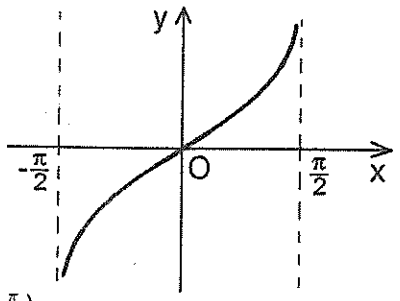
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



Deci funcţia cos este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$ şi strict crescătoare pe $[\pi, 2\pi]$.
Pentru a obţine intervalele de monotonie din $\mathbb{R}$ ale acestei funcţii se adaugă la capetele intervalelor de mai sus multiplu de perioada principală.
Deci pe intervalele $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, funcţia cos este strict descrescătoare, iar pe intervalele
$[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, funcţia cos este strict crescătoare.
Prin particularizări ale lui $k \in \mathbb{Z}$ se obţin intervale din $\mathbb{R}$ pe care funcţia este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

7) Funcţia tangentă, notată $\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = \pi$.
Prin urmare este suficient să studiem comportarea funcţiei pe un interval de lungimea unei perioade, de exemplu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Tabelul de variaţie este

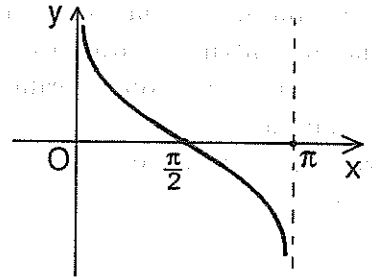
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



Funcţia tg este strict crescătoare pe $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Intervalele din $\mathbb{R}$ pe care funcţia tg este strict crescătoare se obţin adăugând capetelor intervalului de mai sus multiplu de perioada principală. Obţinem intervalele: $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

8) Funcţia cotangentă, notată $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = \pi$.
Vom lua ca interval de studiu $(0, \pi)$. Tabelul de valori arată astfel

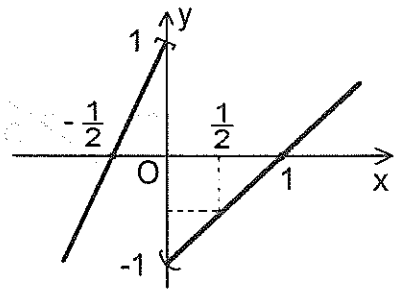
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\operatorname{ctg} x$		$\searrow$	0	$\searrow$	



Funcţia ctg este strict descrescătoare pe $(0, \pi)$.
Intervalele din $\mathbb{R}$ pe care funcţia este strict descrescătoare sunt $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
O funcţie monotonă pe o mulţime A rămâne monotonă pe orice submulţime a sa.
Dacă o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare pe $(-\infty, a]$ şi pe (a, ∞), nu rezultă neapărat că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (adică pe întreaga mulţime).
De exemplu, fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Cum funcţiile $g(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ sunt strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, atunci ele rămân la fel şi pe intervalele $(-\infty, 0]$ şi respectiv $(0, \infty)$.
Deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$, $(0, \infty)$, fără a fi strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deoarece pentru $x_1 = -\frac{1}{2} < x_2 = \frac{1}{2}$ avem $f(x_1) = 0 > f(x_2) = -\frac{1}{2}$.
Aşadar nu pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.
Graficul funcţiei f este cel din figură.



Condiţia de funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ a fost verificată pentru:

1) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

2) $x_1, x_2 \in (0, -\infty)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Mai rămâne de arătat că are loc şi

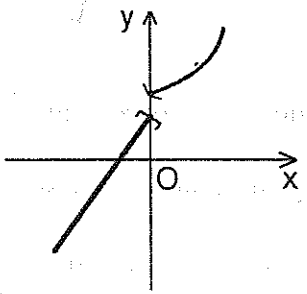
3) $x_1 \in (-\infty, 0]$, $x_2 \in (0, \infty)$ (evident $x_1 < x_2$) să avem $f(x_1) < f(x_2)$.

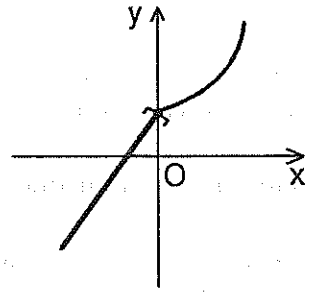
În cazul funcţiei de mai sus tocmai această condiţie nu a avut loc.

În general pentru a arăta că o funcţie multiformă (cu două forme) este strict crescătoare trebuie verificate 1), 2), 3) (unde în loc de zero pot fi orice număr real).

Utilizând graficul putem stabili dacă funcţia este strict crescătoare.

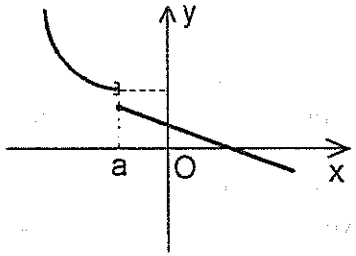
Graficele de mai jos indică funcţii strict crescătoare.

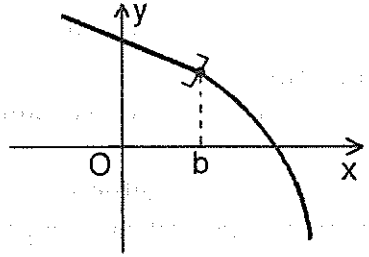




Se observă că ambele ramuri "urcă", iar ramura din dreapta trebuie să "plece" cel puţin din punctul în care se termină ramura din stânga.

Graficele de mai jos indică funcţii strict descrescătoare.





Să observăm că ambele ramuri "coboară", iar ramura din dreapta trebuie să "plece" cel mult din punctul în care se termină ramura din stânga.

Problema se extinde uşor la funcţiile cu mai mult de două ramuri.

Exerciţii propuse

Stabiliţi dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < -1 \\ 2x - 1, & x \geq -1 \end{cases}$; 2) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$;

3) $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$; 4) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x - 3, & x < 0 \end{cases}$;

5) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$; 6) $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \leq 0 \\ -x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

Operaţii cu funcţii strict monotone

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teoremă. 1) Dacă f este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**, atunci $(-f)$ este **strict descrescătoare (strict crescătoare)**.

2) Dacă f, g sunt **strict crescătoare (strict descrescătoare)**, atunci $f + g$ este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**.

(Suma a două funcţii strict crescătoare (strict descrescătoare) este o funcţie strict crescătoare (strict descrescătoare)).

3) Dacă f, g sunt **strict crescătoare** (sau **strict descrescătoare**), atunci $f \circ g$ este **strict crescătoare**

(Compunerea a două funcţii de aceeaşi monotonie dă o funcţie strict crescătoare).

4) Dacă f, g au **monotonii diferite**, atunci $f \circ g$ este **strict descrescătoare**.

5) Fie f inversabilă. Dacă f este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**, atunci f^{-1} este **strict crescătoare (strict descrescătoare)**.

Demonstraţie. 1) Presupunem că f este strict crescătoare.

Să probăm că $(-f)$ este strict descrescătoare. Deci să arătăm că

$(\forall)\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow (-f)(x_1) > (-f)(x_2)$.

Or, $-f(x_1) > -f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, adevărat dacă ţinem seama că f este strict crescătoare.

2) Fie f, g strict crescătoare. Să arătăm că $f+g$ are aceeaşi calitate.
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) < f(x_2)$ şi $g(x_1) < g(x_2)$.
De aici prin adunarea acestor inegalităţi rezultă
$f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$ sau $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$.
Recapitulând avem $(\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$, care reprezintă cerinţa ca $f+g$ să fie strict crescătoare.
Analog se procedează în cazul funcţiilor strict descrescătoare.

3) Presupunem că f, g sunt strict crescătoare. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Atunci (g strict crescătoare) $g(x_1) < g(x_2)$, iar din f strict crescătoare se deduce $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$ sau $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$.
Aşadar $(\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, am obţinut $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2)$, ceea ce arată că $f \circ g$ este strict crescătoare.
Analog se procedează pentru funcţiile f, g strict descrescătoare.

4) Fie f strict crescătoare, g strict descrescătoare. Să arătăm că $f \circ g$ este strict descrescătoare.
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Din g strict descrescătoare se deduce $g(x_1) > g(x_2)$, iar din f strict crescătoare avem:
$f(g(x_1)) > f(g(x_2))$ sau $(f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$.
Deci $(\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow (f \circ g)(x_1) > (f \circ g)(x_2)$, ceea ce arată că $f \circ g$ este strict descrescătoare.

5) Fie $f : I \to J$ inversabilă strict crescătoare şi $f^{-1} : J \to I$ inversa.
Fie $y_1, y_2 \in J$ şi $y_1 < y_2$. Atunci există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Deci $f(x_1) < f(x_2)$. Cum f este strict crescătoare deducem $x_1 < x_2$, adică $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Aşadar din $y_1 < y_2$ $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, adică f^{-1} este strict crescătoare. ■

Observaţii. **1)** Dacă $a > 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare (stri descrescătoare), atunci (af) este strict crescătoare (strict descrescătoare

2) O sumă finită de funcţii strict crescătoare (strict descrescătoare) pe mulţime este o funcţie strict crescătoare (strict descrescătoare) pe ac mulţime.

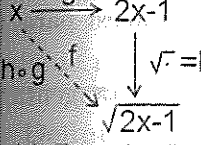
Probleme rezolvate

1. Să se stabilească monotonia funcţiilor următoare:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$; b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$;
c) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$;
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x} + x$;
e) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$;
f) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x - x^3$.

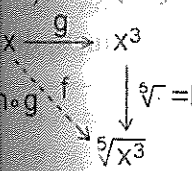
R. a) Funcţia f este sumă de două funcţii strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$,
şi deci este o funcţie strict crescătoare.
b) Punând $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, două funcţii strict crescătoare pe $[0, \infty)$, atunci $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ este de asemenea funcţie strict crescătoare pe $[0, \infty)$ fiind suma a două astfel de funcţii.
c) Dacă $f_1, f_2 : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \operatorname{tg} x$, funcţii strict crescătoare pe $[0, \frac{\pi}{2})$, atunci $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ fiind suma a două funcţii strict crescătoare este, de asemenea, strict crescătoare.
d) Luând $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_3(x) = x$, funcţii strict crescătoare se deduce că $f = f_1 + f_2 + f_3$ are aceeaşi calitate.
e) În acest caz funcţiile $f_1, f_2 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x$ sunt strict descrescătoare, iar $f = f_1 + f_2$ este de asemenea strict descrescătoare.
f) Funcţiile $f_1, f_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = -x^3$ sunt strict descrescătoare şi deci $f = f_1 + f_2$ are aceeaşi proprietate pe $[0, \pi]$.

2. Să se stabilească monotonia funcţiilor:
a) $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x-1}$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$;
c) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x^2$; d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$;
e) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x^3$.

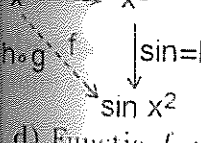
R. a) Funcţia f este compunerea funcţiilor: $g : [\frac{1}{2}, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = 2x - 1$, strict crescătoare şi $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x}$, de asemenea strict crescătoare.
Prin urmare $f = h \circ g$ este strict crescătoare.



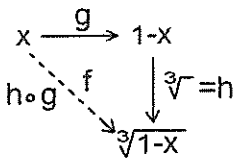
b) Funcţia f este compunerea funcţiilor: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$, strict crescătoare şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[5]{x}$, strict crescătoare. Deci $f = h \circ g$ este strict crescătoare.



c) Funcţia $g : [0, 1] \to [0, 1]$, $g(x) = x^2$ este strict crescătoare, iar $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin x$ este strict crescătoare ($[0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$).
Prin urmare $f = h \circ g$ este strict crescătoare.

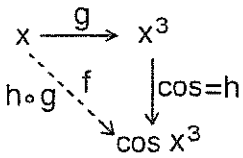


d) Funcţia f este compunerea funcţiilor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,



$g(x) = 1 - x$, strict descrescătoare şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, strict crescătoare.
Deci $f = h \circ g$ este strict descrescătoare.

e) Funcţia f este compunere a două funcţii : $g : [0, 1] \to [0, 1]$,



$g(x) = x^3$, strict crescătoare şi $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$, strict descrescătoare ($[0, 1] \subset [0, \pi]$).
Deci $f = h \circ g$ este strict descrescătoare.

Probleme propuse

Stabiliţi monotonia funcţiilor următoare:

1) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1-x)+x^2$; 2) $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+1+\sqrt{x}$;
3) $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1 - x)$; 4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + \sqrt[3]{x}$;
5) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \sqrt[3]{x}$; 6) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$;
7) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{x} - x$; 8) $f : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2 - x)$;
9) $f : (-\frac{\pi}{2}, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x^2$; 10) $f : (-\frac{\pi}{2}, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\operatorname{tg} x)^3$.

Funcţii convexe (şi concave)

După clasa funcţiilor monotone (**crescătoare** sau **descrescătoare**) p
o mulţime, trebuie subliniată clasa aşanumitelor funcţii **convexe** şi **con
cave**.

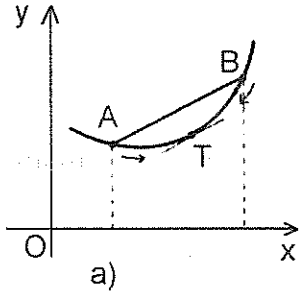
Atragem atenţia că abordarea riguroasă a unor concepte din acest par
graf va fi realizată în cadrul cursului de analiză matematică.

(Presupunem că în fiecare punct al graficului se poate construi tangen
la grafic).

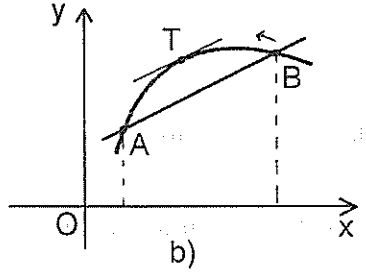
Începem pregătirea acestui paragraf prin câteva remarci:

1) Fie o porţiune din graficul funcţiei $y = f(x)$ şi A, B două puncte d
pe acest grafic.

Considerăm coarda AB de pantă m_{AB}.



a)

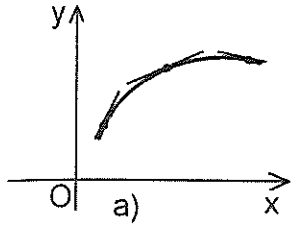


b)

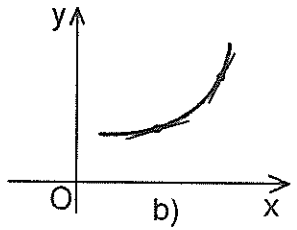
Dacă se "coboară" această coardă păstrând panta m_{AB} a dreptei iniţiale AB, punctele A, B se vor "apropia" pe grafic din ce în ce mai mult până coincid în punctul T. Spunem că dreapta devine tangentă în punctul T la graficul funcţiei. În această situaţie graficul este situat "deasupra" tangentei (fig. a)).

În figura b) graficul este situat sub tangenta în T la grafic.

2) O funcţie poate fi **strict crescătoare** în două moduri (fig. a)-b))



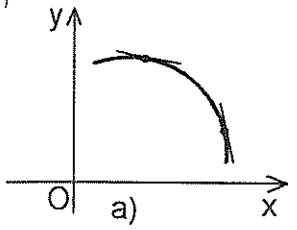
a)



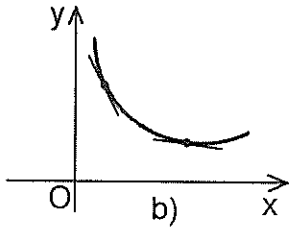
b)

În cazul a) graficul se află sub tangenta în fiecare punct al său, iar în cazul b) graficul se află deasupra fiecărei tangente în fiecare punct al său.

De asemenea o funcţie poate fi **strict descrescătoare** în două moduri (fig. a)-b))



a)



b)

Aceleaşi observaţii de la funcţia strict crescătoare privind poziţia graficului în raport cu tangentele în punctele sale se pot face şi aici.

Definiţie. Fie funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, I interval. Se spune că funcţia f este **convexă** pe I dacă $(\forall)\, x_1, x_2 \in I$ şi $(\forall)\, q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ avem:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2). \qquad (1)$$

Funcţia f se numeşte **concavă** pe I dacă $(\forall)\, x_1, x_2 \in I$ şi $(\forall)\, q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ avem:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2). \qquad (2)$$

Observaţii. 1) Dacă în inegalităţile (1), (2) avem inegalitate strictă se spune că funcţia f este **strict convexă** şi respectiv **strict concavă** pe I.

2) Noţiunea de funcţie convexă (concavă) a fost introdusă de Jensen,

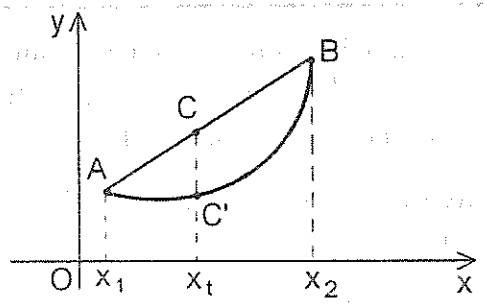
care a pornit de la o relaţie mai particulară decât (1) sau (2) şi anume
$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ şi respectiv $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
care corespunde lui $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$.
Pentru funcţiile pe care le analizăm ($f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \ge 0)$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ ($(0, \frac{\pi}{2})$ de exemplu), $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ($(0, \frac{\pi}{2})$ de exemplu) această definiţie este echivalentă cu cea dată în text.

3) Dacă f este **convexă** pe I, atunci $(-f)$ este **concavă** pe I.

4) Dacă punem $q_2 = t$, atunci $q_1 = 1 - t$ cu $t \in [0, 1]$, iar (1) şi (2) se scriu
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \quad (1')$$
şi respectiv
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \quad (2').$$

Interpretare geometrică

Să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ aparţinând graficului funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, I = interval şi punctul $x_t = (1-t)x_1 + t$.
Acest punct parcurge intervalul $[x_1, x_2]$ când $t \in [0, 1]$.
Într-adevăr trebuie să arătăm că
$$x_1 \le (1-t)x_1 + tx_2 \le x_2.$$
Prima inegalitate se scrie echivalent
$$x_1 \le (1-t)x_1 + tx_2 \Leftrightarrow 0 \le t(x_2 - x_1),$$ evident.
Analog a doua inegalitate devine
$(1-t)x_1 + tx_2 \le x_2 \Leftrightarrow (1-t)x_1 + (t-1)x_2 \le 0 \Leftrightarrow (1-t)(x_1 - x_2) \le$ adevărat deoarece $t \le 1$ şi $x_1 < x_2$.



Dreapta AB are ecuaţia (determinată de două puncte):
$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_2).$$
Fie punctul C' de abscisă x_t care are ordonata
$$y_{C'} = f(x_2) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_t - x_2) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Punctul C' de pe graficul funcţiei are abscisa x_t şi ordonata $y_{C'} = f(x_t)$.
Pentru forma graficului prezentată în figură avem:
$y_{C'} < y_C$ sau $f(x_t) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$,
ceea ce corespunde funcţiei convexe.
Semnificaţia inegalităţii $f(x_t) \le y_C$, cazul funcţiei convexe este:

> Graficul **funcţiei convexe între două puncte ale graficului** este situat sub coarda determinată de cele două puncte.

sau dacă ţinem seamă de remarcile prezentate la început

> Graficul **funcţiei convexe** este situat deasupra oricărei tangente duse într-un punct al graficului.

Semnificaţia inegalităţii $f(x_t) \ge y_C$, cazul funcţiei concave este:

> Graficul **funcţiei concave între două puncte ale graficului** este situat deasupra coardei determinate de cele două puncte.

sau

> Graficul **funcţiei concave** este situat sub orice tangentă dusă într-un punct al graficului.

Se mai spune despre funcţia convexă că are graficul o **curbă convexă**, iar despre funcţia concavă că are graficul o **curbă concavă**.
Un punct al graficului în care se schimbă forma convexă cu concavă sau concavă cu convexă se numeşte **punct de inflexiune** al graficului.
În limbajul trivial spunem despre graficul convex, având forma secţiunii unui vas cu gura în sus, că "ţine apa", în timp ce graficul concav "nu ţine apa".

Exemple de funcţii studiate

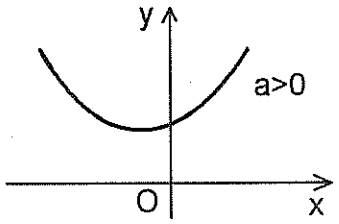
1) **Funcţia de gradul întâi.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \ne 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ este atât convexă cât şi concavă deoarece (pentru $x_1 < x_2$, $t \in [0, 1]$) avem:
$f((1-t)x_1 + tx_2) = a[(1-t)x_1 + tx_2] + b = (1-t)[ax_1 + b] + t[ax_2 + b] = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

2) **Funcţia de gradul al doilea.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

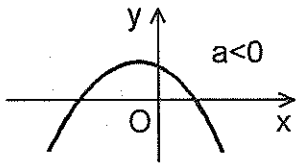
1) Dacă $a > 0$, atunci f este **convexă**.

2) Dacă $a < 0$, atunci f este **concavă**.

1) Dacă $a > 0$ şi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, atunci
$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \Leftrightarrow$
$a((1-t)x_1 + tx_2)^2 + b((1-t)x_1 + tx_2) + c \leq$
$(1-t)(ax_1^2 + bx_1 + c) + t(ax_2^2 + bx_2 + c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a(1-t)t(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, evident.



2) Analog



3) Funcţia cubică, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este **concavă** pe $(-\infty, 0]$ **convexă** pe $[0, \infty)$, ceea ce arată că $O(0,0)$ este punct de inflexiune pentru graficul funcţiei. În general $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$ este **concavă** pe $(-\infty, 0]$ şi **convexă** pe $[0, \infty)$.

4) Funcţia radical de ordin 2, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este **concavă** deoarece $((\forall)\, 0 \leq x_1, x_2$, $(\forall)\, t \in [0,1])$ avem:

$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(1-t)x_1 + tx_2} \geq (1-t)\sqrt{x_1} + t\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$

$(1-t)x_1 + tx_2 \geq (1-t)^2 x_1 + t^2 x_2 + 2t(1-t)\sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow$

$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$,

adevărat (inegalitatea mediilor pentru două numere pozitive).

5) Funcţia radical de ordin 3, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este **convexă** pe $(-\infty, 0]$ şi **concavă** pe $[0, \infty)$. Punctul $O(0,0)$ este punct de inflexiune pentru graficul funcţiei.

6) Funcţia sinus, $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

Pentru această funcţie precizăm convexitatea şi concavitatea pe un interval de lungimea unei perioade principale $[0, 2\pi]$.

Pe $[0, \pi]$ functia este **concavă**, iar pe intervalul $[\pi, 2\pi]$ funcţia este **convexă**.

Deci punctul $x = \pi$ este **punct de inflexiune** al funcţiei.

Pentru $\mathbb{R}$ avem: pe intervalele $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, funcţia este concavă, iar pe intervalele $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, funcţia este convexă. Punctele $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru funcţie.

7) Funcţia cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Pentru intervalul $[0, 2\pi]$ avem: pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ funcţia este **concavă**; pe $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ funcţia este **convexă**; pe $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ funcţia este **concavă**.

Deci punctele $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ sunt puncte de inflexiune pentru funcţia cosinus.

Extinderea acestor rezultate pe $\mathbb{R}$ este imediată.

Din forma graficelor funcţiilor tg pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ şi ctg pe $(0, \pi)$ precizaţi intervalele de convexitate (concavitate) şi punctele de inflexiune.

Observaţie. Se poate demonstra prin inducţie matematică (inegalitatea lui Jensen):

$f(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n) \leq (\geq)\ q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n)$, dacă f este convexă (concavă),

$f : I \to \mathbb{R}$, $q_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$.

Probleme rezolvate

1. a) Să se arate că **produsul** dintre o **funcţie convexă** şi o **funcţie constantă pozitivă** este o **funcţie convexă**.

b) Să se arate că o **sumă** de **funcţii convexe** este o **funcţie convexă**.

c) Dacă $g : I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$, g **convexă**, iar f **convexă** şi **crescătoare**, atunci $f \circ g$ este **convexă**.

d) Dacă f şi g sunt funcţii reciproce, atunci au loc afirmaţiile:

1^o) f **convexă, crescătoare** $\Rightarrow$ g **concavă, crescătoare**;

2^o) f **convexă, descrescătoare** $\Rightarrow$ g **convexă, descrescătoare**;

e) Dacă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, este o funcţie **neconstantă** şi **convexă**, atunci f nu-şi poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.

R. a) Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, f convexă şi $g(x) = k > 0$. Trebuie probat că $f \cdot g$ este convexă, adică $(\forall)\, x_1, x_2 \in I$, $(\forall)\, t \in [0,1]$,

$(kf)((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)(kf)(x_1) + t(kf)(x_2)$.

Cum f este convexă rezultă

$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

Înmulţind această inegalitate prin $k > 0$ se obţine relaţia dorită.

b) Probăm afirmaţia pentru două funcţii convexe $f, g : I \to \mathbb{R}$. Fie $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0,1]$.
Scriem că f, g sunt convexe, adică
$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$,
$g((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)g(x_1) + tg(x_2)$.
Adunăm aceste inegalităţi, membru cu membru, şi obţinem:
$(f+g)((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)(f+g)(x_1) + t(f+g)(x_2)$,
ceea ce arată că $f+g$ este convexă.

c) Din g convexă pe I rezultă
$g((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)g(x_1) + tg(x_2)$, $(\forall)\, x_1, x_2 \in I$, $(\forall)\, t \in [0,1]$.
De aici rezultă (f **crescătoare**, combinată cu f **convexă**):
$(f \circ g)((1-t)x_1 + tx_2) \le f((1-t)g(x_1) + tg(x_2)) \le (1-t)(f \circ g)(x_1) + t(f \circ g)(x_2)$,
ceea ce arată că $f \circ g$ este convexă (de observat momentul în care a intervenit faptul că f este **crescătoare** - deci de reţinut că f, g convexe nu implică $f \circ g$ convexă !).

d) Vom demonstra doar 1°).
Fie $f : I \to J$, I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi $g : J \to I$ inversa lui f. Dacă f este crescătoare, atunci am văzut (la funcţii monotone) că g este crescătoare.
Să arătăm că g este concavă, adică $(\forall)\, y_1, y_2 \in J$, $(\forall)\, t \in [0,1]$
$g((1-t)y_1 + ty_2) \ge (1-t)g(y_1) + tg(y_2)$.
Pentru $y_1, y_2 \in J$, există $x_1, x_2, x \in I$ astfel încât $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x) = (1-t)y_1 + ty_2$.
Din f **convexă** rezultă
$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2) = (1-t)y_1 + ty_2 = f(x)$.
Dar f este crescătoare şi de aici avem:
$(1-t)x_1 + tx_2 \le x$ sau $(1-t)g(y_1) + tg(y_2) \le g((1-t)y_1 + ty_2)$.

e) Prin reducere la absurd. Presupunem că f îşi atinge cea mai mare valoare în x_0 din interiorul intervalului I. Deci există $x_1, x_2 \in I$ astfel încât $x_1 < x_0 < x_2$. De aici $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) < f(x_0)$. Punem $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ şi înmulţim prima inegalitate cu $1-t$ şi a doua cu t şi le adunăm, când avem:
$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) < f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2)$, relaţie ce contrazice convexitatea lui f.

2°. Să se arate că într-un triunghi ABC avem:
$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

R. Funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este concavă.
Conform inegalităţii lui Jensen ($q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3}$)
$\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \ge \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$.
Cum $A + B + C = \pi$, inegalitatea se rescrie: $\frac{\sqrt{3}}{2} \ge \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$.

Probleme propuse

1°. a) Să se arate că produsul dintre o funcţie concavă şi o funcţie constantă pozitivă este o funcţie concavă.
b) Să se arate că o sumă de funcţii concave este o funcţie concavă.

2°. Să se arate că într-un triunghi ascuţitunghic ABC au loc inegalităţile:
1) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$;
2) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \ge 3\sqrt{3}$.

Funcţii injective, surjective, bijective

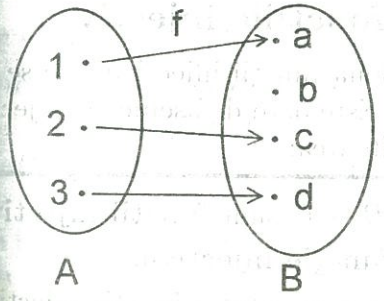
Definiţia funcţiei injective. Proprietăţi.

Fie o funcţie $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

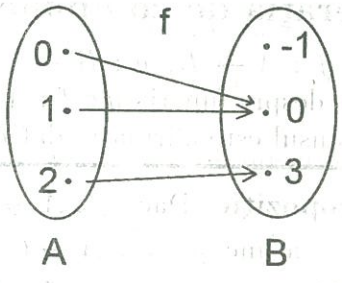
Definiţie. Funcţia f se numeşte **injectivă** (sau încă **injecţie**) dacă

$$\left.\begin{array}{r}(\forall)\, x_1, x_2 \in A \\ x_1 \ne x_2\end{array}\right] \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2) \qquad (*)$$

Aşadar o funcţie f este injectivă dacă la argumente diferite ($x_1 \ne x_2$) le corespund prin f imagini diferite ($f(x_1) \ne f(x_2)$).



Funcţia f este injectivă



Funcţia f nu este injectivă

Analizând funcţiile prezentate mai sus prin "diagrame" constatăm că o funcţie f este injectivă dacă la elementele codomeniului ajunge cel mult o "săgeată". Funcţia f nu este injectivă dacă cel puţin la un element al codomeniului ajung cel puţin două "săgeţi".
De obicei pentru a proba că o funcţie este injectivă se utilizează negaţia reciprocei implicaţiei $(*)$.

Mai precis are loc următoarea:

Propoziţie. Funcţia $f : A \to B$ este **injectivă** dacă

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1) = f(x_2) \\ x_1, x_2 \in A \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Demonstraţia propoziţiei este imediată.
Pentru a proba că o **funcţie nu este injectivă** se găsesc două elemen $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$.
De exemplu funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă deoare există $x_1 = -1 \neq 1 = x_2$ pentru care $f(-1) = f(1) = 1$.

Monotonie şi injectivitate

Are loc următoarea:

Propoziţie. Orice funcţie strict monotonă este injectivă.

Demonstraţie. Fie $f : A \to B$ strict crescătoare (analog se procede dacă este strict descrescătoare). Să arătăm că f este injectivă adică d
$(\forall)\, x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Din $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Dacă $x_1 < x_2$, atunci
$f(x_1) < f(x_2)$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$.
La fel din $x_1 > x_2$ rezultă $f(x_1) > f(x_2)$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$. ■

Operaţia de compunere şi funcţiile injective

Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt două funcţii injective. Ce se po spune despre funcţia $g \circ f : A \to C$? Este oare de asemenea injectivă Răspunsul este afirmativ dat de următoarea:

Propoziţie. Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt **funcţii injective**, atunci $g \circ f : A \to C$ este o **funcţie injectivă**.
(Compunerea a două funcţii injective este tot o funcţie injectivă)

Demonstraţie. Trebuie arătat că dacă
$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$, atunci $x_1 = x_2$.
Din $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Cum g este inject de aici rezultă $f(x_1) = f(x_2)$. În fine, cum şi f este injectivă dedu $x_1 = x_2$. ■

Observaţie. Arătaţi că dacă $g \circ f$ **este injectivă**, atunci f **este inj**

tivă.

Exemple studiate de funcţii injective

1) Funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ este injectivă.
Într-adevăr arătăm că dacă $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, atunci $x_1 = x_2$.
Din $f(x_1) = f(x_2)$ rezultă $ax_1 + b = ax_2 + b$ sau $ax_1 = ax_2$. Cum $a \neq 0$ de aici rezultă $x_1 = x_2$.

Observaţie. Funcţia de gradul întâi fiind strict monotonă este injectivă.

2) Funcţia cubică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este injectivă.
Fie $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. De aici $x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$. Produsul este zero dacă cel puţin unul din factori este zero. Deci $x_1 - x_2 = 0$, adică $x_1 = x_2$ sau $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$. Ultima egalitate este imposibilă deoarece gândită ca o ecuaţie de gradul al doilea în x_1 (sau x_2) aceasta nu are rădăcini reale pentru că discriminantul ei este negativ. Rămâne deci $x_1 = x_2$. Dacă $\Delta = 0$, atunci $x_1 = x_2 = 0$.
Prin urmare dacă $f(x_1) = f(x_2)$ se obţine $x_1 = x_2$, ceea ce arată că f este injectivă.

Observaţie. Funcţia cubică fiind strict crescătoare este injectivă.

3) Funcţia radical de ordin 2. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este injectivă, deoarece din $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \geq 0$ rezultă $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ sau $x_1 = x_2$.

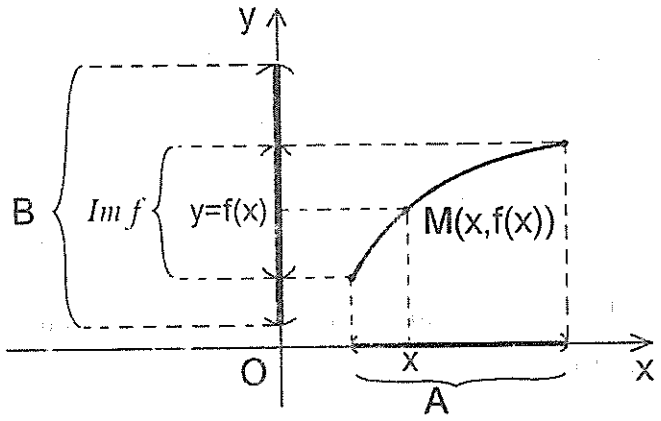
Analog $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este injectivă.

Observaţii. Această funcţie fiind strict crescătoare este injectivă.

4) Funcţia radical de ordin 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este injectivă.
În general $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ este injectivă.

Observaţie. Această funcţie fiind strict crescătoare este injectivă.

Dacă funcţiei f i se cunoaşte graficul, atunci se poate preciza dacă funcţia f este sau nu injectivă.
Pentru a stabili rezultatul se impun câteva precizări.
Dacă $f : A \to B$ este o funcţie numerică ($A, B \subseteq \mathbb{R}$), atunci în trasarea graficului în reperul cartezian xOy se pun în evidenţă puncte $M(x, y)$, unde $x \in A$, $y = f(x) \in B$.



Mulțimii A îi corespund puncte de pe axa Ox, iar mulțimii B punct de pe axa Oy (vezi figura). Am marcat mai îngroșat aceste mulțimi p fiecare axă.

Este clar că $Im\, f = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$.

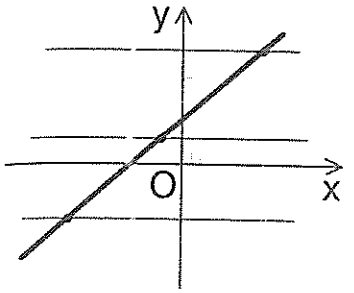
Dacă funcția este injectivă, atunci la un element $y \in B$ ajunge prin f cel mult un element $x \in A$, adică $f(x) = y$. Să reținem și această ultim formulare care oferă un alt mod de a stabili dacă o funcție este injectivă. Dar $y = b \in B$ reprezintă ecuația unei drepte paralele cu axa Ox. Pentr a vedea dacă există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y = b$, dreapta $y = b$ ar trebui să intersecteze graficul funcției. Acest punct (sau puncte de intersecție are abscisa (abscisele) x $(x_1, x_2, \cdots)$ pentru care $f(x) = b$ $(f(x_1) = f(x_2) = \cdots = b)$.

Acum este ușor de stabilit următoarea:

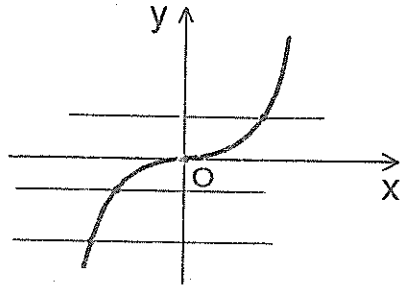
Regulă. Funcția $f : A \to B$ **este injectivă** dacă orice paralelă ($y = b \in B$) dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox intersectează graficul în cel mult un punct.

Funcția f **nu este injectivă**, dacă există cel puțin o paralelă dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox care intersectează graficul în cel puțin două puncte.

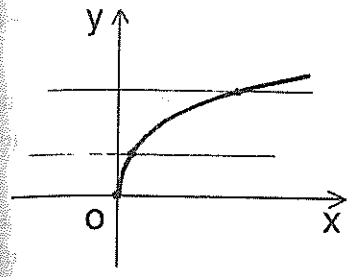
Graficele funcțiilor prezentate mai sus



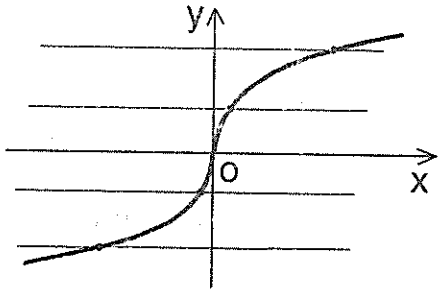
Graficul funcției de gradul întâi



Graficul funcției cubice

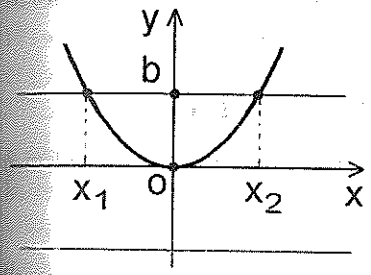


Graficul funcției radical de ordin 2

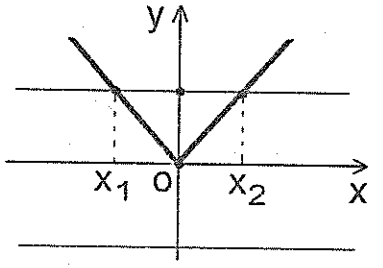


Graficul funcției radical de ordin 3

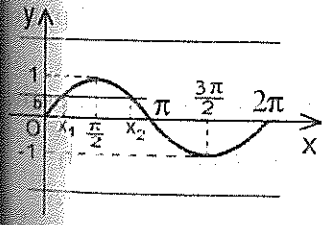
Exemple de funcții neinjective



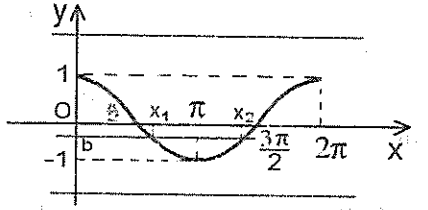
Graficul funcției $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$



Graficul funcției $f(x) = |x|$



Graficul funcției $f(x) = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$



Graficul funcției $f(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

Al treilea mod de abordare a injectivității unei funcții utilizează o idee

pe care am prezentat-o mai sus: funcţia f este injectivă dacă la un element $y \in B$, ajunge prin f cel mult un element $x \in A$, adică $f(x) = y$. Reformulând avem următoarea:

Propoziţie. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă: pentru orice $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie.

Revenim asupra exemplelor analizate.

1) Funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ este injectivă deoarece pentru $y \in \mathbb{R}$, arbitrar ales ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie (aici chiar o soluţie). Într-adevăr $f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$, reprezintă soluţia unică a ecuaţiei.

2) Funcţia cubică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este injectivă pentru că ecuaţia $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ arbitrar (fixat) are cel mult o soluţie (chiar o soluţie). Din $f(x) = y$ rezultă $x^3 = y$, cu unica soluţie reală $x = \sqrt[3]{y}$.

3) Funcţia radical de ordin 2 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ este injectivă deoarece pentru orice $y \geq 0$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie $x \geq 0$.
Avem $f(x) = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \geq 0$.

4) Funcţia radical de ordin 3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este injectivă pentru că ecuaţia $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat are cel mult o soluţie $x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr din $f(x) = y \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y \Rightarrow x = y^3$.

Exemple de funcţii care nu sunt injective

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Pentru $y > 0$ arbitrar fixat ecuaţia $f(x) = y$ are mai mult de o soluţie.
Într-adevăr din $f(x) = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Pentru $y > 0$, ecuaţia $f(x) = y$ are mai mult de o soluţie pentru că din $f(x) = y \Rightarrow |x| = y \Rightarrow x = \pm y$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Pentru $y = \frac{1}{2}$, ecuaţia $\sin x = \frac{1}{2}$ are cel puţin soluţiile $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{13\pi}{6}$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Pentru $y = 0$, ecuaţia $\cos x = 0$ are cel puţin soluţiile $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

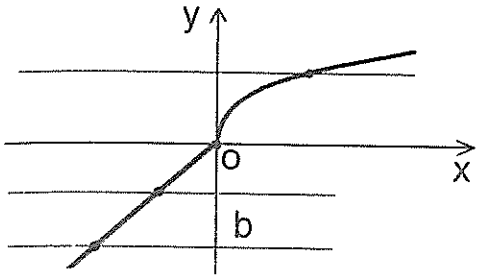
Observaţie. Dacă $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2, \\ \dots & \dots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ şi $B_i = \operatorname{Im} f_i$, $i = \overline{1, n}$, atunci faptul că f este injectivă se poate proba arătând că $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Mulţimile B_i sunt situate pe axa Oy.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0, \end{cases}$ este injectivă.

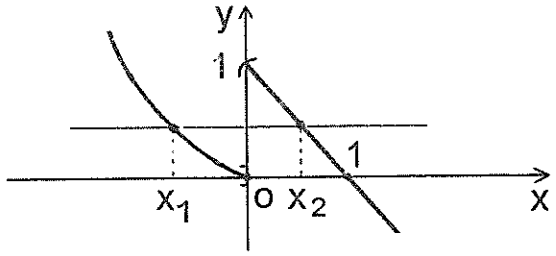
R. Se poate realiza uşor graficul acestei funcţii.



Observăm că orice paralelă dusă printr-un punct al axei Oy (codomeniu) la axa Ox taie graficul funcţiei în cel mult un punct.
Să probăm acum că f este injectivă utilizând definiţia
$(\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Se analizează cazurile:
1°) $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2°) $x_1, x_2 < 0$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
3°) $x_1 \geq 0$, $x_2 < 0$ (evident $x_1 \neq x_2$). Atunci $\sqrt{x_1} \neq x_2$, deoarece $\sqrt{x_1} \geq 0$, iar $x_2 < 0$. Deci şi în acest caz $f(x_1) \neq f(x_2)$.
În fine, ultima posibilitate de a proba că f este injectivă este aceea de a arăta că ecuaţia de necunoscută x, $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ (codomeniu) are cel mult o soluţie.
Dacă $x \geq 0$, atunci $f(x) = \sqrt{x}$ şi deci ecuaţia este $\sqrt{x} = y$. Cum membrul stâng este pozitiv se impune ca şi membrul drept să fie pozitiv, adică $y \geq 0$. Din $\sqrt{x} = y$ rezultă $x = y^2$. **Deci pentru** $y \geq 0$, **ecuaţia** $f(x) = y$ **are soluţia** $x = y^2$ (1).
Dacă $x < 0$, atunci $f(x) = x$ şi ecuaţia este $x = y$. Din $x < 0$ rezultă $y < 0$. **Deci pentru** $y < 0$ **rezultă** $x = y$ **soluţia ecuaţiei** $f(x) = y$. (2).
Din (1) şi (2) se observă că $(\forall) y \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie şi deci f este injectivă.
Observaţie. Funcţia fiind strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ şi pe $[0, \infty)$ şi cele două "capete" ale ramurilor coincid se deduce că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică f este injectivă.

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0\\ -x+1, & x>0\end{cases}$ este injectivă.

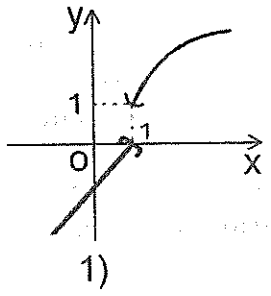
R. Graficul funcţiei este cel dat în figură.



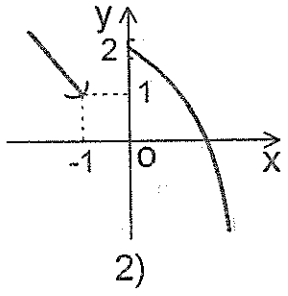
Se constată că o dreaptă $y=b$, unde $b\in[0,1)$, taie graficul în do
puncte $x_1\neq x_2$, ceea ce arată că f nu este injectivă.
Probăm neinjectivitatea lui f arătând că ecuaţia în x $f(x)=y$, are n
mult de o soluţie pentru cel puţin un y.
Dacă $x\le 0$, atunci ecuaţia $f(x)=y\Rightarrow x^2=y$ (când y trebuie să
pozitiv) adică $x=\pm\sqrt{y}$. Cum $x\le 0$ se reţine $x=-\sqrt{y}$.
Deci pentru $y\ge 0$, ecuaţia $f(x)=y$ are o soluţie $x=-\sqrt{y}$. (1)
Dacă $x>0$, atunci ecuaţia $f(x)=y\Rightarrow -x+1=y$ are soluţia $x=1-$
Cum $x>0\Rightarrow 1-y>0$, adică $y<1$.
Deci pentru $y<1$, ecuaţia $f(x)=y$ are o soluţie $x=1-y$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă că dacă $y\in[0,1)$ ecuaţia $f(x)=y$ are două soluţ
$x_1=-\sqrt{y}$, $x_2=1-y$, ceea ce arată că f nu este injectivă.

Probleme propuse

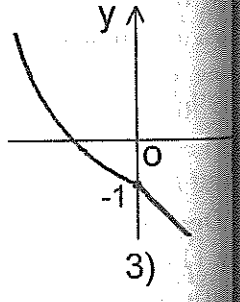
1. Stabiliţi care dintre funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ale căror grafice sunt prez
tate mai jos, sunt injective:



1)



2)



3)

2. Stabiliţi (prin metodele prezentate) care din funcţiile de mai jos e
injectivă:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$;

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x\le -1\\ -x+4, & x>-1\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x\le -8\\ x+6, & x>-8\end{cases}$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\ge 1\\ -x^2+3, & x<1\end{cases}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{x}, & x\le 0\\ -x-1, & x>0\end{cases}$;

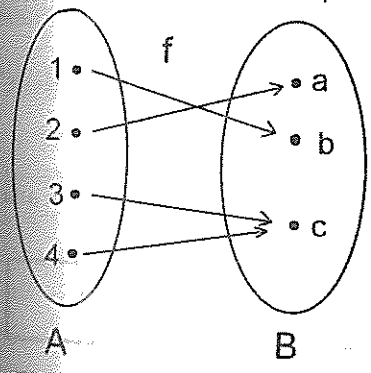
6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}+1, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$

Definiţia funcţiei surjective. Proprietăţi

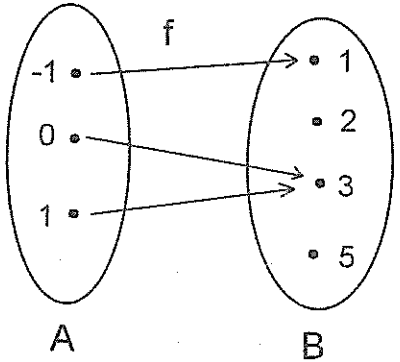
Fie o funcţie $f:A\to B$, $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

Definiţie. Funcţia f se numeşte **surjectivă** (sau încă **surjecţie**) dacă pentru orice $y\in B$, există cel puţin un element $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$.

Cu alte cuvinte funcţia f este surjectivă dacă orice element (y) al codomeniului (B) este imaginea prin f a cel puţin unui element (x) din domeniul (A) al funcţiei. Funcţia f **nu este surjectivă** dacă există cel puţin un element y al codomeniului astfel încât $(\forall)\,x\in A$ să rezulte $f(x)\neq y$.
Iată două funcţii definite prin "diagrame".



Funcţia f este surjectivă



Funcţia f nu este surjectivă

Dacă funcţia f este definită printr-o diagramă, atunci f este surjectivă dacă la fiecare element al codomeniului ajunge cel puţin o "săgeată".

Funcţia f nu este surjectivă dacă există cel puţin un element al codomeniului la care nu ajunge nici o "săgeată".

Observaţie importantă. Elementul $x \in A$ care apare în definiţie se obţine rezolvând ecuaţia $f(x) = y$.

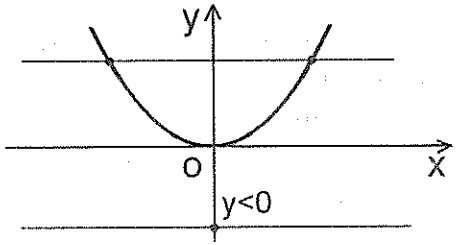
Tehnicile de lucru prin care am probat că f este injectivă se aplică şi pentru o funcţie surjectivă cu anumite corecţii impuse de definiţia funcţiei surjective. Mai precis are loc următoarea:

Regulă. Funcţia $f : A \to B$ este **surjectivă** dacă orice paralelă ($y = b \in B$) dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox intersectează graficul în cel puţin un punct.

Funcţia f **nu este surjectivă** dacă există cel puţin o paralelă dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox care nu intersectează graficul în nici un punct.

După cum se poate constata funcţiile analizate cu ajutorul graficelor, funcţiile injective sunt şi funcţii surjective.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este surjectivă deoarece pentru $y < 0$ o paralelă dusă prin acest punct al codomeniului la Ox nu taie graficul în nici un punct.



Dar funcţia $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ este surjectivă.

Alt mod de a proba surjectivitatea funcţiei $f : A \to B$ este de a arăta că:

ecuaţia în x, $f(x) = y$, $y \in B$ are cel puţin o soluţie $x \in A$.

Să reluăm exemplul de mai sus. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Pentru $y < 0$, ecuaţia $f(x) = y$, adică $x^2 = y$ evident nu are soluţie. Deci f nu este surjectivă.

Observaţie. Dacă $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2, \\ \dots & \dots \\ f_n(x), & x \in A_n \end{cases}$

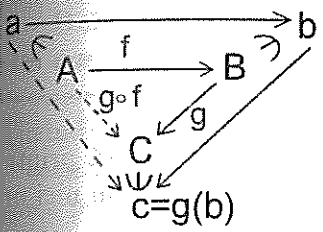
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ şi $B_i = \operatorname{Im} f_i$, $i = \overline{1, n}$, atunci faptul că f este surjectivă se poate proba arătând că $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$. Mulţimile B_i sunt situate pe axa Oy.

Compunere şi surjectivitate

Legat de compunerea a două funcţii surjective are loc următoarea:

Propoziţie. Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt două **funcţii surjective**, atunci şi funcţia $g \circ f : A \to C$ este **surjectivă**.

Demonstraţie. Să arătăm că pentru orice $c \in C$, există cel puţin un element $a \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a) = c$.



Fie deci $c \in C$. Cum funcţia g este surjectivă există cel puţin un element $b \in B$ astfel încât $g(b) = c$, (1). Funcţia f fiind de asemenea surjectivă pentru $b \in B$ (găsit mai sus) există $a \in A$ astfel încât $f(a) = b$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $g(f(a)) = c$ sau $(g \circ f)(a) = c$. ■

Observaţie. Arătaţi că dacă $g \circ f$ **este surjectivă**, atunci g este **surjectivă**.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$ este surjectivă.

R. Trebuie să arătăm că $(\forall) y \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie în $\mathbb{R}$. Pentru rezolvarea acestei ecuaţii ţinem seama de faptul că f are două forme. Deci rezolvăm ecuaţia în două cazuri:

1) $x \leq -1$. Ecuaţia este $x + 1 = y$ cu soluţia $x = y - 1$. Cum $x \leq -1$ se impune $y - 1 \leq -1$, adică $y \leq 0$. Deci $(\forall) y \leq 0$, ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia $x = y - 1 \leq -1$, (1).

2) $x > -1$. Ecuaţia se scrie $x^2 - 1 = y$ sau $x^2 = y + 1$. Cum $x^2 \geq 0$ se impune $y + 1 \geq 0$, adică $y \geq -1$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x = \pm\sqrt{y + 1}$.

Să observăm că $x = \sqrt{y+1} > -1$. Deci ecuaţia are cel puţin o soluţie.
Aşadar pentru $y \geq -1$ ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia $x = \sqrt{y+1}$, (2).
Din (1) şi (2) se constată că pentru orice $y \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(x) = y$ are c
puţin o soluţie. Deci funcţia este surjectivă.

2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$
este surjectivă.

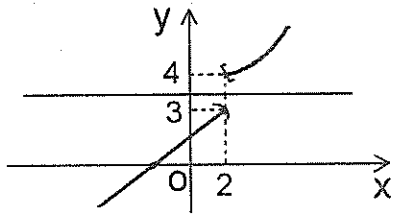
R. Arătăm că ecuaţia în x, $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ are cel puţin o rădăci
reală. Distingem două cazuri:

1°) $x \geq 1$, ecuaţia este $\sqrt{x} = y$. Membrul stâng ($\sqrt{x}$) fiind pozitiv
impune $y \geq 0$. Din $\sqrt{x} = y$ rezultă $x = y^2$. Cum $x \geq 1$ rezultă $y^2 \geq$
care coroborat cu $y \geq 0$ dă $y \geq 1$.
Aşadar pentru $y \geq 1$, există $x \geq 1$ astfel încât $f(x) = y$, (1).

2°) $x < 1$, ecuaţia devine: $2x - 1 = y$ cu soluţia $x = \frac{y+1}{2}$.
Din $x < 1$ rezultă $\frac{y+1}{2} < 1$, adică $y < 1$.
Deci pentru $y < 1$, există $x < 1$ astfel încât $f(x) = y$, (2).
Din (1) şi (2) rezultă că $(\forall) y \in \mathbb{R}$, există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) =$
ceea ce arată că f este surjectivă.

3. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ x + 1, & x < 2 \end{cases}$ nu es
surjectivă.

R. Trasăm graficul şi constatăm că o paralelă la axa Ox dusă prin
un punct din intervalul $(3, 4)$ al codomeniului nu taie graficul în nici
punct.



Altfel să arătăm că ecuaţia $f(x) = y$ nu are soluţii pentru orice $y \in \mathbb{R}$.
Analizăm cele două cazuri date de definiţia funcţiei:

1°) $x \geq 2$, ecuaţia este $x^2 = y$. Se impune $y \geq 0$ când $x = \pm\sqrt{y}$. Cu
$x \geq 2$ rezultă $\sqrt{y} \geq 2$, adică $y \geq 4$. Deci pentru $y \geq 4$, există $x \geq 2$ ast
încât $f(x) = y$, (1).

2°) $x < 2$, ecuaţia $x + 1 = y$ are soluţia $x = y - 1$. Din $x < 2$ se ded
$y < 3$. Deci pentru $y < 3$, există $x < 2$ astfel încât $f(x) = y$, (2).
Din (1) şi (2) se vede că numai pentru $y < 3$ sau $y \geq 4$ ecuaţia $f(x) =$
are soluţie. Dacă $y \in [3, 4)$, ecuaţia nu mai are soluţii. Deci f nu e
surjectivă.

Probleme propuse

Studiaţi surjectivitatea (prin metodele cunoscute) funcţiilor de mai jos:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$; **2)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$;

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \leq 0 \end{cases}$;

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -2 \\ 3x + 1, & x > -2 \end{cases}$;

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0 \end{cases}$;

6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in (-\infty, -1] \\ -x - 1, & x \in (-1, 0) \\ -x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Definiţia funcţiei bijective. Proprietăţi.

Fie o funcţie $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

> **Definiţie.** Funcţia f se numeşte **bijectivă** (sau încă **bijecţie**) dacă f este atât **injectivă** cât şi **surjectivă**.

Ţinând seama de cele spuse la funcţia injectivă cât şi surjectivă, **funcţia f este bijectivă** dacă orice element (y) al codomeniului (B) este imaginea prin f a unui singur element (x) din domeniul (A) al funcţiei.
Altfel spus:

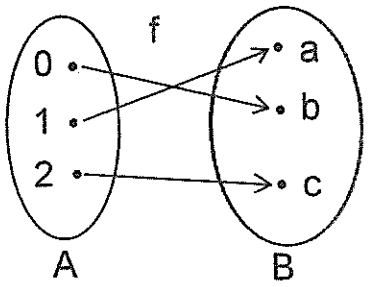
> Funcţia f este bijectivă dacă pentru orice $y \in B$, ecuaţia $f(x) = y$ are o unică soluţie în A.

Dacă este dat graficul funcţiei f, atunci:

> **Regulă.** Funcţia $f : A \to B$ este **bijectivă** dacă orice paralelă $(y = b \in B)$ dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox intersectează graficul în exact un punct.

O funcţie bijectivă se mai numeşte şi corespondenţă "one to one", adică o corespondenţă "unu la unu".
Dacă funcţia este dată printr-o diagramă, atunci ea este bijectivă dacă

la orice element din codomeniu soseşte o singură săgeată.



Funcţia f este bijectivă.

Exemple studiate de funcţii bijective

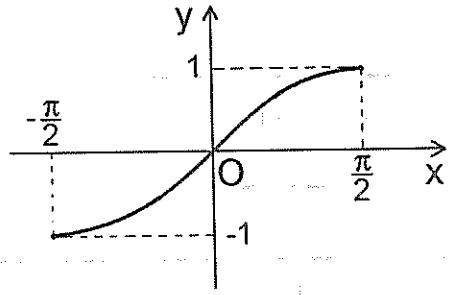
1) Funcţia de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in$ este bijectivă deoarece este atât injectivă cât şi surjectivă.

2) Funcţia cubică $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fiind atât injectivă cât surjectivă este bijectivă.

3) Funcţia radical de ordin 2. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ e bijectivă fiind injectivă şi surjectivă.

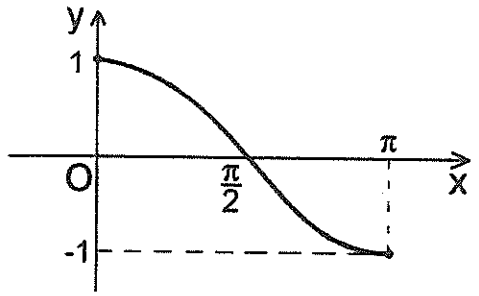
4) Funcţia radical de ordin 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este bijecti deoarece este injectivă şi surjectivă.

5) Funcţia sinus restricţionată la $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pe care o notăm tot sin $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ este bijectivă, având graficul dat mai jos.

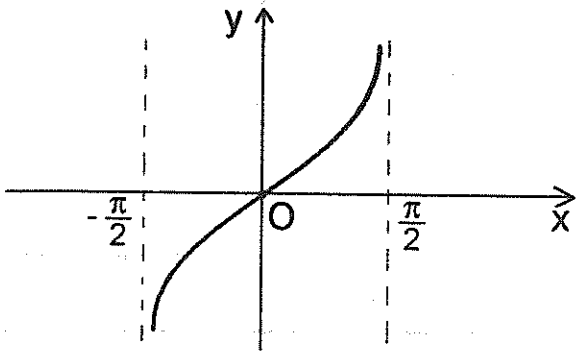


Se constată că orice dreaptă $y = b \in [-1, 1]$ taie graficul în exact punct.

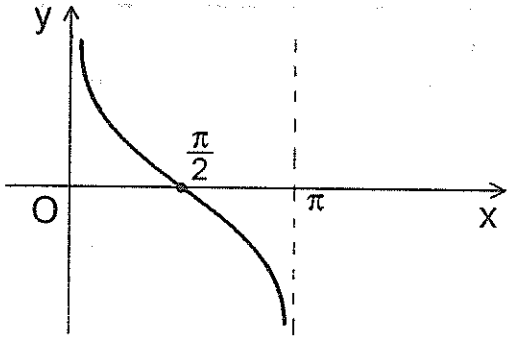
6) Funcţia cosinus restricţionată la $[0, \pi]$ şi notată tot cos : $[0, \pi]$ $[-1, 1]$ este de asemenea bijectivă.



7) Funcţia tangentă restricţionată la $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ şi notată tot tg : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ este bijectivă.



8) Funcţia cotangentă restricţionată la $(0, \pi)$ şi notată tot ctg : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$ este bijectivă.



Compunere şi bijectivitate

Ţinând seama de comportarea funcţiilor injective şi surjective în raport cu operaţia de compunere se stabileşte uşor următoarea:

Propoziţie. Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sunt două funcţii bijective, atunci funcţia $g \circ f : A \to C$ este bijectivă.

Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă

Dacă A este o mulţime, atunci funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$, $a \in A$, numeşte funcţia identică a mulţimii A.
Reamintim definiţia pentru o funcţie inversabilă:

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte **inversabilă** dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât

$$g \circ f = 1_A \quad \text{şi} \quad f \circ g = 1_B.$$

Funcţia g din definiţie am numit-o **inversa** funcţiei f şi am notat $g = f^{-1}$.
Am arătat că dacă o funcţie are inversă aceasta este unică.
Uneori se spune că f este funcţia directă, iar f^{-1} reciproca sa.
Se pune problema: În ce condiţii f este inversabilă ? Ce informaţii avem despre f pentru a fi inversabilă ? Dacă f este inversabilă cum procedăm pentru a găsi f^{-1} ?
La aceste întrebări dă răspuns explicit sau implicit (pentru construcţia lui f^{-1} din demonstraţie) următoarea:

Teoremă. O funcţie $f : A \to B$ este **inversabilă** dacă şi numai dacă f **este bijectivă.**

Demonstraţie. Presupunem că f este inversabilă şi să demonstrăm că f este bijectivă. Funcţia f fiind inversabilă rezultă că există $f^{-1} : B \to A$ astfel încât:

$$f \circ f^{-1} = 1_B, \; f^{-1} \circ f = 1_A. \quad (1)$$

Arătăm că f este **injectivă**. Fie deci $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$.
Din a doua egalitate din (1) rezultă $x_1 = 1_A(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = x_2$.
Aşadar din $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in A$ rezultă $x_1 = x_2$, ceea ce arată că f este injectivă.
Probăm acum că f este **surjectivă**. Să arătăm că $(\forall)\, y \in B$, există cel puţin un $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$.
Din prima egalitate din (1) avem:

$$y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)).$$

Punem acum $f^{-1}(y) = x \in A$ şi deci $f(x) = y$.
Reciproc, să arătăm că dacă f este bijectivă, atunci f este inversabilă.
Acesta este pasul în care construim inversa lui f, funcţia g cu proprietăţile $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f = 1_A$.
Definirea funcţiei $g : B \to A$. Fie $y \in B$. Cum f este surjectivă există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Elementul x din A este **unic** cu această proprietate deoarece f este injectivă.
Definim $g(y) = x$. Prin urmare g este bine definită.
Arătăm că $g \circ f = 1_A$ (egalitatea a două funcţii). Domeniile celor două funcţii sunt egale cu A, codomeniile sunt egale cu A.
Să arătăm că funcţiile coincid punctual, adică

$$(\forall)\, x \in A \Rightarrow (g \circ f)(x) = 1_A(x).$$

Avem: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = 1_A(x)$.
Analog se arată că $f \circ g = 1_B$. ■

Observaţii. 1) Funcţia bijectivă $f : A \to B$ este aplicaţia "unu la unu", care asociază fiecărui $x \in A$, unicul element $y = f(x)$ din B

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

Aplicaţia reciprocă $f^{-1} : B \to A$, "acţionează" invers, asociind elementului $y \in B$, unicul element $x \in A$ cu proprietatea că $f(x) = y$

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ \cup & & \cup \\ y & \longrightarrow & x, \; f(x) = y \end{array}$$

Practic inversa lui $f : A \to B$ se determină prin rezolvarea ecuaţiei în x, $f(x) = y$, $y \in B$. Soluţia unică $x \in A$, $x = g(y)$ precizează inversa lui f.

2) Graficul funcţiei f^{-1} este simetricul graficului lui f în raport cu dreapta $y = x$ (prima bisectoare).
Următoarea propoziţie arată că dacă funcţia inversabilă $f : A \to B$ este strict crescătoare (sau strict descrescătoare), atunci şi inversa sa $f^{-1} : B \to A$ este strict crescătoare (sau strict descrescătoare).
Avem deci:

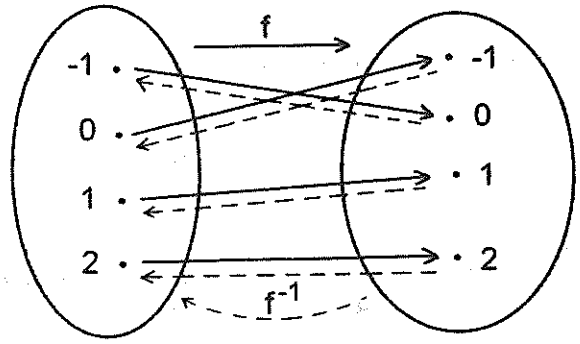
Propoziţie. Fie $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$, o funcţie **bijectivă şi strict crescătoare (strict descrescătoare).** Atunci $f^{-1} : B \to A$ este, de asemenea, **strict crescătoare (strict descrescătoare).**

Demonstraţie. Analizăm cazul f strict crescătoare. Trebuie arătat că dacă $y_1, y_2 \in B$, $y_1 < y_2$, atunci $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Pentru $y_1, y_2 \in B$, există $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ (f este surjectivă).
Cum $y_1 < y_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ (f fiind strict crescătoare).

Dar din $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ se deduce $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ deci cerința propoziției este imediată. ■

Probleme rezolvate

1. Fie funcția $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1, 2\}$, definită prin diagrama



Să se stabilească f^{-1}

R. Mai întâi să observăm că f este bijectivă. În fiecare punct al codomeniului ajunge o singură "săgeată". Deci f este inversabilă. Inversa este marcată discontinuu fiind definită prin $f^{-1}(-1) = 0$, $f^{-1}(0) = -1$, $f^{-1}(1) = 1$, $f^{-1}(2) = 2$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$. Arătați că f este bijectivă și calculați f^{-1}.

R. Am văzut că funcția de gradul întâi este bijectivă, deci inversabilă. Aplicația directă este

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & y = f(x) = 3x+1 \end{array}$$

Aplicația inversă este

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ y & \longrightarrow & x, \ f(x) = y \end{array}$$

, unde x se află rezolvând ecuația $f(x) = y$.

Din $f(x) = y$ rezultă $3x + 1 = y$ adică $x = \frac{y-1}{3}$.

Prin urmare $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3}$, $y \in \mathbb{R}$.

Observație. În locul variabilei y se poate utiliza orice variabilă, inclusiv x numai cu precizarea mulțimii căreia îi aparține. Deci se poate scrie $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ 4x - 5, & x > 2 \end{cases}$ este inversabilă și determinați f^{-1}.

R. Se arată ușor că f este bijectivă folosind una din metodele expuse la partea teoretică. Deci f este inversabilă.

Inversa funcției se determină rezolvând ecuația în x : $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ (codomeniu).

Cum f are două forme se rezolvă această ecuație în două cazuri:

1°) dacă $x \leq 2$, atunci $f(x) = 2x - 1$ și deci ecuația de rezolvat devine $2x - 1 = y$ cu soluția $x = \frac{y+1}{2}$.

Cum $x \leq 2$, deducem $\frac{y+1}{2} \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 3$.

Deci pentru orice $y \leq 3$, există $x \leq 2$ astfel încât $f(x) = y$. (1);

2°) dacă $x > 2$, atunci $f(x) = 4x - 5$ și se obține ecuația $4x - 5 = y$ cu soluția $x = \frac{y+5}{4}$.

Din $x > 2$ rezultă $\frac{y+5}{4} > 2 \Leftrightarrow y > 3$.

Așadar pentru orice $y > 3$, există $x > 2$ astfel încât $f(x) = y$. (2).

Din (1) și (2) rezultă că $(\forall)\, y \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = y$ are o unică soluție $x \in \mathbb{R}$.

Acum inversa este dată de $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & y \leq 3 \\ \frac{y+5}{4}, & y > 3. \end{cases}$$

Observație. Din definiția lui f, domeniul se "sparge" în două mulțimi $(-\infty, 2]$, $(2, \infty)$. Aplicația directă este:

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y = 4x-5 \\ \cap & & \cap \\ (-\infty, 2] \cup (2, \infty) & \longrightarrow & (-\infty, 3] \cup (3, \infty) \\ \cup & & \cup \\ x & \longrightarrow & y = 2x-1 \end{array}$$

Acum aplicația reciprocă acționează invers (în sensul uzual al cuvântului):

$$\begin{array}{ccc} y & \longrightarrow & x, \ f(x)=4x-5=y, \ x=\frac{y+5}{4} \\ \cap & & \cap \\ (-\infty, 3] \cup (3, \infty) & \longrightarrow & (-\infty, 2] \cup (2, \infty) \\ \cup & & \cup \\ y & \longrightarrow & x, \ f(x)=2x-1=y \Rightarrow x=\frac{y+1}{2} \end{array}$$

Deci $f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & y \leq 3 \\ \frac{y+5}{4}, & y > 3. \end{cases}$

Probleme propuse

1. Arătaţi că următoarele funcţii sunt inversabile şi calculaţi inversa

1) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$; 4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$;

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2 \\ 2x + 5, & x \geq -2 \end{cases}$;

6) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x \geq 1 \\ -x - 1, & x < 1 \end{cases}$;

7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -5x, & x > 0 \end{cases}$;

8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \\ x - 1, & x \leq 1 \end{cases}$;

9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq \frac{1}{2} \\ -x^2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$;

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$;

11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2}, & x \geq -2 \\ -x^2 + 4, & x < -2. \end{cases}$

1.2. FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Recapitularea noţiunii de putere cu exponent raţio

1) Putere cu exponent natural. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, atunci a definit puterea a^n (unde a este **baza puterii**, iar n **exponentul** puter prin

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n}, & \text{dacă } n > 0 \\ 1, & \text{dacă } n = 0 \text{ şi } a \neq 0. \end{cases}$$

De asemenea dacă:

1) $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^n < 1$

2) $a > 1 \Rightarrow a^n > 1$.

2) Putere cu exponent întreg. Dacă $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci am definit noţiunea de putere cu exponent întreg negativ prin

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3) Putere cu exponent raţional pozitiv. Dacă $a \geq 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci am definit

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

De asemenea dacă ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

1) $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < 1$;

2) $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$.

4) Puterea cu exponent raţional negativ. Dacă $a > 0$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci am definit

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Principalele proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional erau următoarele:

Dacă $a, b > 0$ şi $x, y \in \mathbb{Q}$, atunci

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; **2)** $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; **4)** $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; (*)

5) $(a^x)^y = a^{xy}$

Au loc de asemenea următoarele două proprietăţi date de următoarea

Propoziţie. 1) Dacă

$$\left.\begin{array}{l} 0<a<1 \\ x\in\mathbb{Q},\ x>0 \end{array}\right] \Rightarrow 0<a^x<1,$$

şi dacă

$$\left.\begin{array}{l} 0<a<1 \\ x\in\mathbb{Q},\ x<0 \end{array}\right] \Rightarrow a^x>1;$$

Dacă $x,y\in\mathbb{Q},\ x<y,\ 0<a<1$, atunci $a^x>a^y$.

2) Dacă

$$\left.\begin{array}{l} a>1 \\ x\in\mathbb{Q},\ x>0 \end{array}\right] \Rightarrow a^x>1,$$

şi dacă

$$\left.\begin{array}{l} a>1 \\ x\in\mathbb{Q},\ x<0 \end{array}\right] \Rightarrow 0<a^x<1.$$

Dacă $x,y\in\mathbb{Q},\ x<y,\ a>1$, atunci $a^x<a^y$.

Demonstraţie. 1) Fie $x\in\mathbb{Q},\ x>0$, de forma $x=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$. Avem $a^x=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Cum $a\in(0,1)$, atunci $a^m\in(0,1)$ şi $\sqrt[n]{a^m}\in(0,1)$. Dacă $x\in\mathbb{Q},\ x<0$, şi $x=-\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$, atunci $a^x=a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. Din $a\in(0,1)$ rezultă $a^m\in(0,1)$ şi $\sqrt[n]{a^m}\in(0,1)$, deci $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}>1$.

Fie $0<\frac{m}{n}<\frac{p}{q}$, $n,q\in\mathbb{N}^*,\ n,q\geq 2$, numere raţionale pozitive. Atunci $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$. Se aduc radicalii acelaşi ordin: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nq]{a^{mq}}$, $\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{pn}}$. Din $mq<pn,\ 0<a<1$ rezultă $a^{mq}>a^{pn}\Rightarrow a^x>a^y$.

2) Dacă $a>1$, atunci luăm $a=\frac{1}{b}$, $b\in(0,1)$ şi avem $a^x=\frac{1}{b^x}$, după care se aplică 1). ■

Puteri cu exponent real

În acest paragraf dorim să extindem puterile cu exponent raţional la puterile cu exponent real (cu exponent iraţional). Această ultimă extindere necesită o abordare diferită de cea utilizată până acum şi depăşeşte cadrul manualului de faţă (riguros aceste concepte sunt studiate la cursul de Analiză matematică). De aceea ne mulţumim să ilustrăm principiul cu ajutorul unui exemplu.

Să presupunem că trebuie să definim $a^{\sqrt{2}}$, în cazul în care $a>1$.

Ideea cea mai naturală constă în a aproxima numărul real $\sqrt{2}$ prin lipire şi prin adaos, cu ajutorul şirurilor infinite de numere raţionale.

De exemplu

$$1<1,4<1,41<1,414<\cdots<\sqrt{2}<\cdots<1,415<1,42<1,5<2.$$

Numerele a^1, $a^{1,4}$, $a^{1,41}$, $a^{1,414}$, $\cdots$ sunt în ordine crescătoare, iar numerele a^2, $a^{1,5}$, $a^{1,42}$, $a^{1,415}$, $\cdots$ sunt în ordine descrescătoare.

Este deci plauzibil să admitem existenţa unui număr real unic α situat la "punctul de întîlnire" al celor două şiruri de numere:

$$a^1<a^{1,4}<a^{1,41}<a^{1,414}<\cdots<\alpha<\cdots<a^{1,415}<a^{1,42}<a^{1,5}<a^2.$$

Atunci este logic de a reprezenta acest număr α prin notaţia $a^{\sqrt{2}}$.

Se demonstrează că lista de proprietăţi $(*)$ rămâne valabilă şi pentru puterile cu exponenţi iraţionali. Dacă $x\in\mathbb{R},\ x>0$, atunci prin definiţie

$$\boxed{a^{-x}=\frac{1}{a^x}}$$

Se demonstrează următorul rezultat:

$$\boxed{(\forall)\,a>0,\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}\Rightarrow a^x>0},$$

cu alte cuvinte orice putere cu exponent real este un număr strict pozitiv.

Probleme propuse

1. Arătaţi că:

1) $\left[6-4\left(\frac{5}{16}\right)^0\right]^{-2}=\frac{1}{4}$; **2)** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\frac{3}{4}\right]^{-1}=\frac{4}{3}$;

3) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{-2^{-2}+1^0}-=4$; 4) $(3^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}})^2:[(2-15^{\frac{1}{4}})(2+15^{\frac{1}{4}})]=2$;

5) $(16^{-\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{2}})[16^{-0,25}+(3\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}]=-\frac{1}{12}$.

2. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

1) $E(a)=(a^{\frac{1}{8}}-1)(a^{\frac{1}{8}}+1)(a^{\frac{1}{4}}+1)(a^{\frac{1}{2}}+1)(a+1)$;

2) $E(a)=(a^{-2}-a^{-1}+1)(a^{-3}-a^{-2}+a^{-1}-1)$;

3) $E(a)=(\sqrt{a^7}-a^3+\sqrt{a^5}-a^2+a\sqrt{a}-a+\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$;

4) $E(x,y)=\frac{x-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 5) $E(x,y)=\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$;

6) $E(x,y)=\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

3. Care din următoarele numere este mai mare ?

1) $\sqrt[6]{10}$ sau $\sqrt[4]{3}$; 2) $(\sqrt{0,2})^{-3,5}$ sau 1; 3) $\sqrt[6]{24}$ sau $\sqrt[3]{5}$;

4) $\sqrt[15]{623}$ sau $\sqrt[3]{5}$; 5) $(2\sqrt[3]{2})^{-6}$ sau 2^{-11}; 6) $\sqrt[21]{9}$ sau $\sqrt[42]{81}$;
7) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ sau $\sqrt[7]{\sqrt{13}}$; 8) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[4]{2^5}}}$ sau $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$.

Funcţia exponenţială

Importanţa studiului functiei exponenţiale constă în faptul că un număr mare de fenomene analizate de ştiinţe se exprimă cu ajutorul unei funcţii exponenţiale. Apoi plecând de la funcţia exponenţială, de la proprietăţile acesteia se poate studia o altă funcţie importantă, cea logaritmică.

Definiţie. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Funcţia
$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f(x) = a^x,$$
se numeşte **funcţia exponenţială de bază** a.

Observaţii. 1) De ce baza $a \neq 1$? Pentru că dacă $a = 1$, atunci funcţia f definită, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1^x = 1$ este constantă şi nu este considerată ca o funcţie exponenţială.

2) A nu se confunda funcţia exponenţială $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ cu funcţia $g(x) = x^a$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Pentru prima funcţie a este baza puterii care este constantă, în timp ce pentru a doua funcţie a este exponentul puterii x^a care este constant.

3) Proprietăţile puterilor cu exponent raţional (real) vor sta la baza studiului acestei funcţii. Vom analiza principalele proprietăţi ale acestei funcţii în cazurile când baza este subunitară ($0 < a < 1$) sau supraunitară ($a > 1$). Având în vedere impactul imaginii asupra elevului (a omului în general) pentru descifrarea unor proprietăţi ale funcţiei exponenţiale vom desena acum

Graficul funcţiei exponenţiale

Vom trasa graficul funcţiei exponenţiale în două cazuri:

1) baza $a \in (0, 1)$ (spunem că baza este subunitară);
2) baza $a > 1$ (spunem că baza este supraunitară).

De fiecare dată vom trasa graficul pentru două valori ale bazei, în tentativa de a surprinde comportarea funcţiei atunci când baza este variabilă în fiecare din "registrele" de la 1) sau 2).

1) Graficul funcţiei exponenţiale $f(x) = a^x$ cu baza subunitară $0 < a < 1$.

Vom considera funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_1(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f_2(x) = (\frac{1}{3})^x$, având bazele în relaţia $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$. Vom construi tabelele de valori ale funcţiilor şi apoi într-un reper cartezian xOy vom marca punctele $(x, f_i(x))$, $i = 1, 2$ pe care le vom uni apoi printr-o linie continuă, obţinând astfel graficele celor două funcţii.

Tabelele de valori pentru cele două funcţii sunt:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	∞
$f_1(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$+\infty$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
$f_2(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$+\infty$	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	0

Valori foarte mari ← → Valori foarte mici

Mulţimea valorilor funcţiei este : $(0, +\infty)$

Tabelul de valori ne sugerează că:

1) funcţia exponenţială cu bază subunitară este strict descrescătoare pe tot domeniul de definiţie;

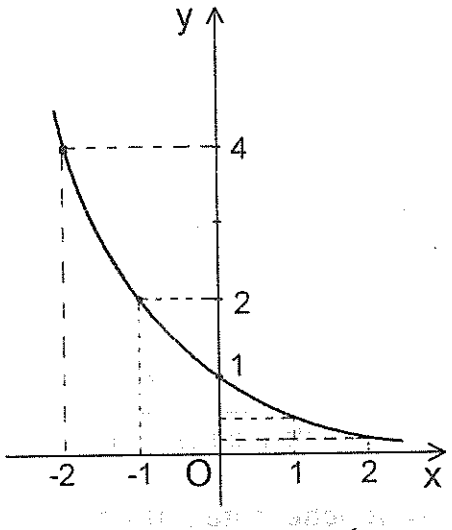
2) funcţia exponenţială ia valori pozitive: subunitare la dreapta lui 0 şi supraunitare la stânga lui 0, ceea ce arată că graficul acestei funcţii este situat deasupra axei Ox;

3) punctul $(0, 1)$ este punctul de intersecţie a graficului cu axa Oy;

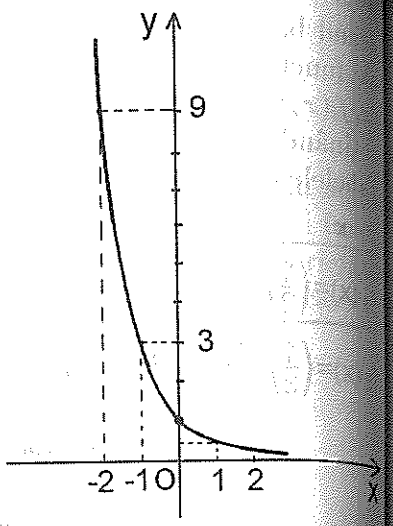
4) dacă $x < 0$, atunci $f_1(x) < f_2(x)$, ceea ce precizează că punctele $(x, f_1(x))$, $(x, f_2(x))$ **de aceeaşi abscisă** $x < 0$ sunt situate pe aceeaşi paralelă cu Oy, primul sub al doilea, adică pentru $x < 0$, este mai aproape de Oy graficul exponenţialei cu baza mai mică $(\frac{1}{3})$;

5) pentru valori pozitive mari funcţia exponenţială ia valori foarte mici pozitive care se apropie de zero, ceea ce arată că graficul acesteia se apropie foarte mult de Ox. Spunem că axa Ox este **asimptotă orizontală** pentru graficul funcţiei la ramura de la $+\infty$.

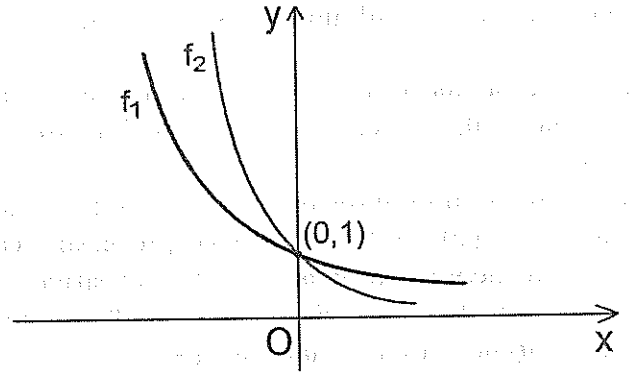
În plus, este mai aproape de axa Ox acel grafic care are baza mai mică.



Graficul funcţiei $f_1(x) = (\frac{1}{2})^x$



Graficul funcţiei $f_2(x) = (\frac{1}{3})$



Graficele funcţiilor f_1, f_2 în acelaşi reper xOy
(graficul lui f_1 este marcat mai îngroşat)

Concluzii. 1) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază subunitară e situat deasupra axei Ox. Acest grafic intersectează axa Oy în $(0,1)$.

2) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază subunitară este format dint singură ramură care coboară convex. Deci are loc relaţia (Jensen)

$$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ adică } a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2},$$

relaţie care rezultă imediat din inegalitatea mediilor (aritmetică şi g metrică).

3) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază subunitară este din ce în ce mai apropiat de axele de coordonate, cu cât baza este mai mică.

2) Graficul funcţiei exponenţiale $f(x) = a^x$ cu bază supraunitară $a > 1$.

Fie funcţiile $f_3, f_4 : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f_3(x) = 2^x$, $f_4(x) = 3^x$, având bazele $1 < 2 < 3$.

Tabelul de valori ale acestor funcţii arată astfel:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$\mathbf{0}$		1		2		3		$+\infty$
$f_3(x)=2^x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$
$f_4(x)=3^x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	9	$\nearrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$

Valori foarte mici ← → Valori foarte mari

Mulţimea valorilor funcţiei este : $(0,+\infty)$

Lectura tabelelor de valori pune în evidenţă următoarele:

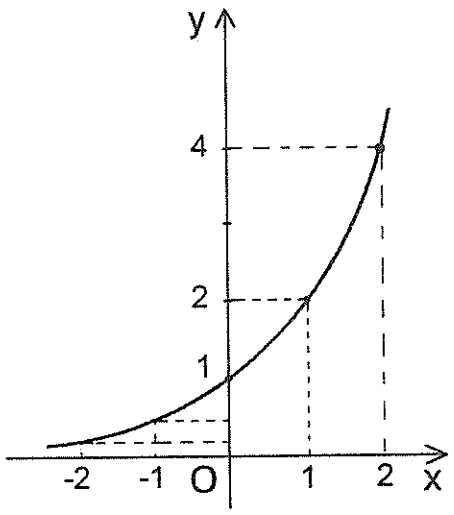
1) funcţia exponenţială de bază supraunitară este strict crescătoare pe tot domeniul de definiţie;

2) funcţia exponenţială cu baza supraunitară ia numai valori strict pozitive: subunitare la stânga lui zero şi supraunitare la dreapta lui zero; prin urmare graficul acestei funcţii este situat deasupra axei Ox;

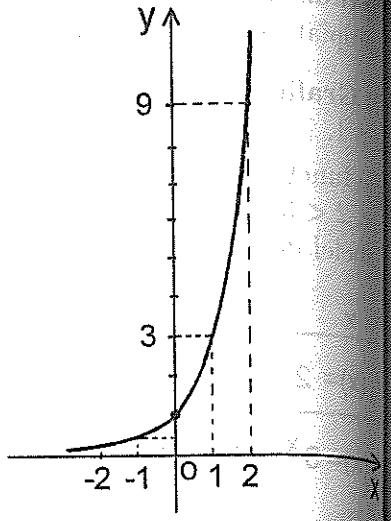
3) punctul $(0,1)$ este punctul de intersecţie a graficului cu axa Oy;

4) dacă $x < 0$, atunci $f_3(x) > f_4(x)$, ceea ce arată că punctele $(x, f_3(x))$, $(x, f_4(x))$ de aceeaşi abscisă $x < 0$ sunt situate pe aceeaşi paralelă cu Oy, primul deasupra celui de-al doilea, adică pentru $x < 0$ este mai aproape de Ox graficul exponenţialei cu bază mai mare (3); pentru valori negative mici funcţia ia valori foarte mici pozitive care se apropie de zero, ceea ce arată că graficul funcţiei se apropie foarte mult de axa Ox. Spunem că axa Ox este **asimptotă orizontală** pentru graficul funcţiei la ramura de la $-\infty$.

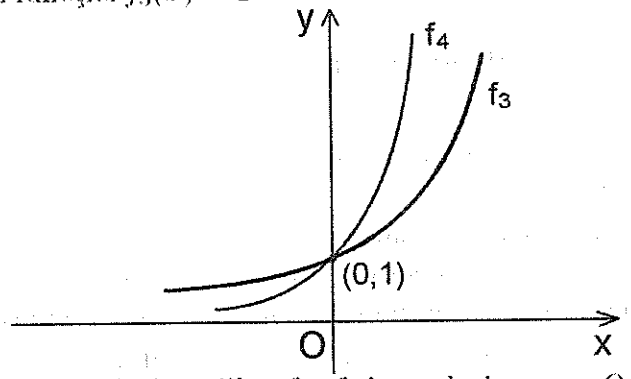
5) dacă $x > 0$, atunci $f_3(x) < f_4(x)$, ceea ce arată că pe această mulţime graficul funcţiei f_4 este mai aproape de axa Oy.



Graficul funcţiei $f_3(x) = 2^x$



Graficul funcţiei $f_4(x) =$



Graficele funcţiilor f_3, f_4 în acelaşi reper xOy
(Graficul lui f_3 este marcat mai îngroşat)

Concluzii. 1) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază supraunitară e situat deasupra axei Ox. Acest grafic intersectează axa Oy în $(0, 1)$.

2) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază supraunitară este format dint o singură ramură care urcă convex. Deci şi în acest caz are loc relaţia Jensen:

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

3) Graficul funcţiei exponenţiale cu bază supraunitară este din ce în mai apropiat de axele de coordonate, cu cât baza este mai mare.

Proprietăţi ale funcţiei exponenţiale

1) Funcţia exponenţială face să-i corespundă sumei a două numere reale produsul valorilor corespunzătoare ale funcţiei, adică

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2),\ (\forall)\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Este imediată ţinând seama de operaţiile cu puteri cu exponenţi reali $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. ■

Observaţie. Ţinând seama de proprietăţi ale puterilor cu exponenţi reali: $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$ şi $(a^{x_1})^c = a^{cx_1}$, $x_1, x_2, c \in \mathbb{R}$ rezultă:

$$f(x_1 - x_2) = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}$$

adică diferenţei de două numere reale funcţia exponenţială face să-i corespundă câtul valorilor corespunzătoare ale funcţiei şi

$$f(cx_1) = (f(x_1))^c$$

adică produsului unui număr real printr-un alt număr real funcţia exponenţială face să-i corespunda valoarea funcţiei corespunzătoare primului număr ridicată la o putere având ca exponent numărul al doilea.

2) Monotonia funcţiei exponenţiale

Dacă: $a > 1$, atunci $f(x) = a^x$ este **strict crescătoare**;

$0 < a < 1$, atunci $f(x) = a^x$ este **strict descrescătoare**.

Demonstraţie. Probăm afirmaţia în cazul $a > 1$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Trebuie să arătăm că $f(x_1) < f(x_2)$, adică $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Dacă $x_1 < x_2$, atunci există $\epsilon > 0$ astfel încât $x_2 = x_1 + \epsilon$.

Avem: $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+\epsilon} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^\epsilon - 1)$.

Cum $a > 1$, atunci $a^\epsilon > 1$. Din $a^{x_1} > 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$, deducem $a^{x_2} - a^{x_1} > 0$, adică $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Analog se procedează dacă $0 < a < 1$. ■

Observaţie. Monotonia funcţiei exponenţiale intervine la rezolvarea ecuaţiilor (inegalităţilor) exponenţiale.

Avem echivalenţele:

Pentru $a > 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
Pentru $0 < a < 1$, $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

3) Funcţia exponenţială este convexă.

Pentru funcţiile pe care le studiem noi, condiţia de convexitate este echivalentă cu inegalitatea lui Jensen

$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $(\forall)\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ceea ce este uşor probat.
Forma graficului arată că orice tangentă într-un punct al graficului la graficul deasupra tangentei.

Observaţie. Funcţia exponenţială fiind convexă ea nu îşi poate atinge cea mai mare valoare în interiorul intervalului.

4) $a^0 = 1$, $a > 0$.

5) Funcţia exponenţială **este bijectivă** şi deci inversabilă.

Demonstraţie. O funcţie este bijectivă dacă este atât injectivă cât şi surjectivă.
Faptul că funcţia exponenţială este surjectivă se va vedea la cursul de Analiză matematică, iar din 2) rezultă că f este injectivă (am văzut că orice funcţie strict monotonă este injectivă).
Fiind bijectivă această funcţie este inversabilă. ■

Această ultimă proprietate ne permite să scriem echivalenţa

$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

pe care o vom utiliza la rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale.

Probleme rezolvate

1. Utilizând graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$, trasaţi graficele următoarelor funcţii:

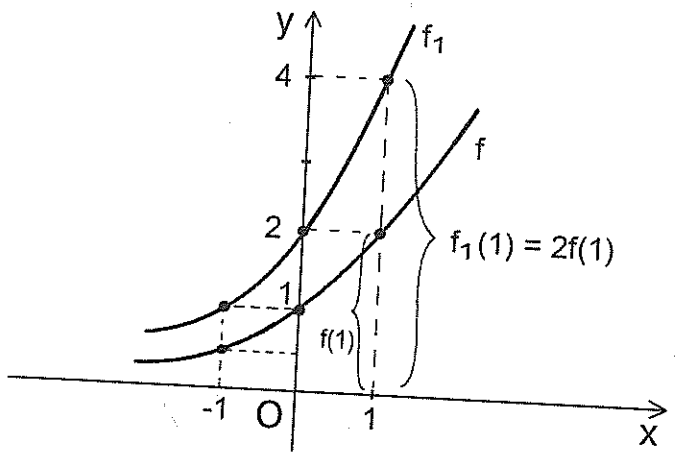
a) $f_1 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_1(x) = 2^{x+1}$; b) $f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_2(x) = 2^{x-1}$; c) $f_3 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_3(x) = 2^x + 1$; d) $f_4 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_4(x) = 2^{|x|}$.

R. Realizăm pentru fiecare funcţie tabelul său de valori alături de cel al funcţiei date pentru a vedea cum se comportă valorile funcţiei noi în raport cu cea dată.

a)

x	-∞		-3	-2	-1	0	1	2	3		+∞
$f(x)= 2^x$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↗ $\frac{1}{4}$	↗ $\frac{1}{2}$	↗ 1	↗ 2	↗ 4	↗ 8	↗	+∞
$f_1(x)= 2^{x+1}$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗ $\frac{1}{2}$	↗ 1	↗ 2	↗ 4	↗ 8	↗ 16	↗	+∞

Observăm uşor că pentru un $x \in \mathbb{R}$ fixat $f_1(x) = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2 \cdot f(x)$. Deci într-un punct $x \in \mathbb{R}$ valoarea funcţiei f_1 este dublul valorii funcţiei f în acelaşi punct.

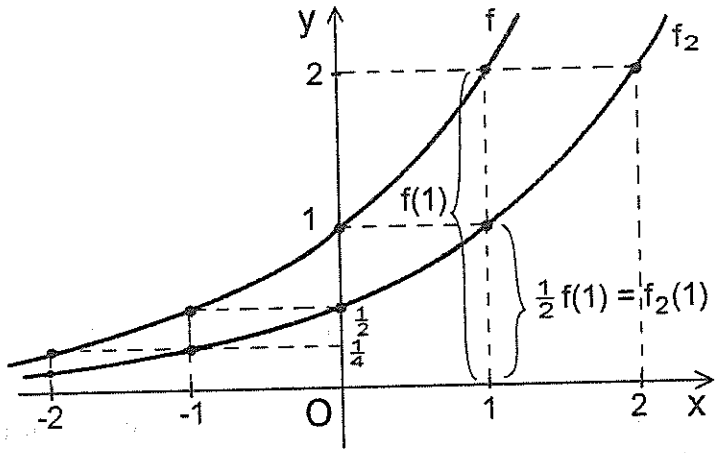


În figură am marcat valorile celor două funcţii în -1, 0, 1.
Din punct de vedere al monotoniei funcţiei f_1 aceasta este strict crescătoare fiind produsul unei funcţii strict crescătoare cu o constantă pozitivă.

b) Tabelele de valori sunt:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x) = 2^x$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	4	↗	$+\infty$
$f_2(x) = 2^{x-1}$	0	↗	$\frac{1}{8}$	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	$+\infty$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, $f_2(x) = 2^{x-1} = \frac{2^x}{2} = \frac{1}{2} f(x)$, adică valoarea funcţiei într-un punct este egală cu jumătatea valorii lui f în acelaşi punct. Cu această observaţie trasarea graficului se face uşor

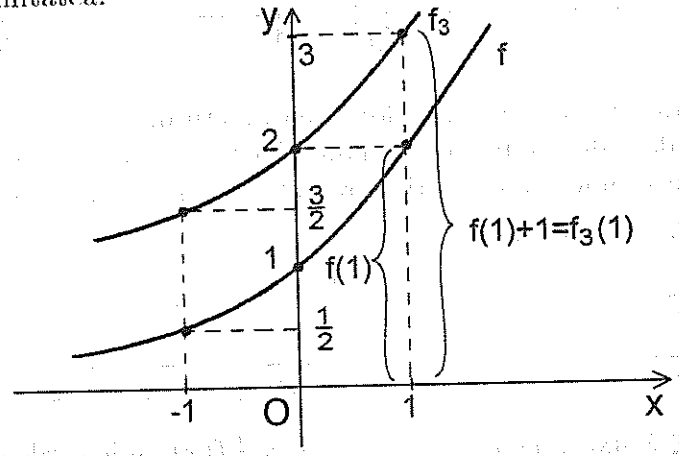


Aceeaşi remarcă de la a) rămâne şi aici valabilă relativ la monotonia funcţiei f_2.

c) Tabelele de valori pentru f şi f_3 sunt cele de mai jos

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f(x)=2^x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$f_3(x)=2^x+1$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru un $x \in \mathbb{R}$ fixat valoarea lui f_3 este $f_3(x) = 2^x + 1 = f(x) +$ ceea ce arată că se obţine din valoarea funcţiei f în acest punct la c se adaugă unitatea.



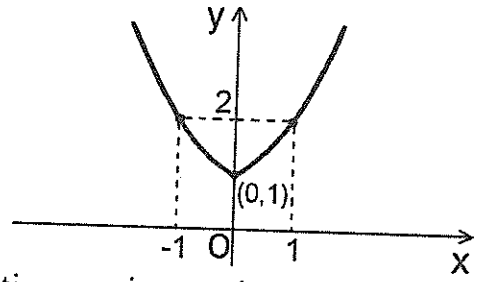
Practic graficul lui f_3 se obţine din cel al funcţiei f printr-o transl de-a lungul axei Oy (în sus) cu o unitate.

d) În acest caz este bine să se observe că avem egalitatea

$f_4(-x) = f_4(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$,

ceea ce arată că f_4 este funcţie pară şi deci graficul ei este simetric în raport cu axa Oy.

Deci este suficient să trasăm graficul lui f_4 pentru $[0, \infty)$ şi apoi pentru $x < 0$, se face simetricul celui realizat pe $[0, \infty)$ în raport cu Oy.



2. Determinaţi cea mai mare şi cea mai mică valoare (dacă există) pentru următoarele funcţii (precizând domeniul de definiţie):

a) $f(x) = 2^{\sqrt{2-x}}$; b) $f(x) = (\frac{1}{3})^{\sqrt{9-x^2}}$; c) $f(x) = 2^{\sin x}$; d) $f(x) = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 2$.

R. a) Funcţia este definită pentru orice x pentru care $2 - x \geq 0$, adică $x \leq 2$. Să observăm că funcţia f este compunerea a trei funcţii $x \to 2 - x$ (strict descrescătoare), $x \to \sqrt{x}$ (strict crescătoare) şi $x \to 2^x$ (strict crescătoare).

Am văzut că prin compunerea unei funcţii strict crescătoare cu una strict descrescătoare se obţine o funcţie strict descrescătoare. Aplicând acest raţionament de două ori pentru f se ajunge la concluzia că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$.

Prin urmare f ia cea mai mică valoare pentru $x = 2$, când $\min f = 1$.

b) Funcţia radical de ordin par impune condiţia $9 - x^2 \geq 0$, adică $x \in [-3, 3]$. Se ştie că funcţia $g(x) = 9 - x^2$, are valoarea maximă pentru $x_{\max} = -\frac{b}{2a} = 0$, când $g(0) = 9$. Pe intervalul $[-3, 3]$ valorile lui g sunt în intervalul $[0, 9]$.

Funcţia $x \to \sqrt{x}$ fiind crescătoare pe $[0, \infty)$ rămâne la fel şi pe o submulţime a acesteia $[0, 9]$. Valorile funcţiei $x \to \sqrt{9 - x^2}$ vor fi $[\sqrt{0}, \sqrt{9}] = [0, 3]$.

În fine funcţia $x \to (\frac{1}{3})^x$ este strict descrescătoare şi deci valorile acesteia pentru $x \in [0, 3]$ se află în intervalul $[\frac{1}{27}, 1]$.

Deci $\max f = 1$ pentru $x_{\max} = \pm 3$ şi $\min f = \frac{1}{27}$ pentru $x_{\min} = 0$.

c) Funcţia $x \to \sin x$ are valoarea maximă 1 pentru $x_{\max} = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ când $\max f = 2$, şi valoarea minimă (-1) dacă $x_{\min} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, când $\min f = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) Dacă notăm $2^x = y > 0$, atunci funcţia: $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 - 4y + 2$ are minim pentru $y_{\min} = \frac{4}{2} = 2$ când $\min g = -2$.

Cum $y = 2^x$ rezultă $2^x = 2$ dă $x_{\min} = 1$.
Deci $\min f = -2$ pentru $x_{\min} = 1$.

3. Comparaţi perechile de puteri:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}$ şi $\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}$: b) $10^{-\frac{3}{5}}$ şi $10^{-\frac{1}{2}}$.

R. a) Pentru a compara cele două puteri utilizăm monotonia funcţiei exponenţiale cu baza subunitară $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ care se ştie este strict descrescătoare. Cum $1000 < 2000$, deducem $f(1000) > f(2000)$. Deci primul număr este mai mare decât al doilea.

b) În acest caz monotonia funcţiei exponenţiale de bază supraunitară $f(x) = 10^x$ (care se ştie este strict crescătoare) ajută la rezolvarea acestui punct. Din $-\frac{3}{5} < -\frac{1}{2}$ rezultă $f(-\frac{3}{5}) < f(-\frac{1}{2})$, adică primul număr este mai mic decât al doilea.

4. 1) Ce concluzie poate fi trasă relativ la exponentul x dacă:

a) $3^x = 5$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2,3$.

2) Ce concluzie poate fi trasă asupra bazei pozitive a dacă:

a) $a^{\frac{3}{7}} > a^2$; b) $a^{-\frac{1}{7}} < a^{-\frac{1}{2}}$.

R. 1) a) Pentru $x = 1$ rezultă $3^1 = 3 < 5$, iar pentru $x = 2$ avem $3^2 = 9 > 5$. Prin urmare $3^1 < 3^x = 5 < 3^2$. Cum funcţia $f(x) = 3^x$ este strict crescătoare rezultă că relaţia de ordine dintre valori $f(1) < f(x) < f(2)$ se păstrează şi între exponenţi. Deci $1 < x < 2$.

b) Avem $(\frac{1}{3})^{-1} = 3 > 2,3$, iar $(\frac{1}{3})^0 = 1 < 2,3$. Deci

$(\frac{1}{3})^0 < (\frac{1}{3})^x = 2,3 < (\frac{1}{3})^{-1}$.

Funcţia exponenţială $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ este strict descrescătoare. Inegalităţile de mai sus se scriu $f(0) < f(x) < f(-1)$. De aici $0 > x > -1$.

2) a) Fie funcţia exponenţială $f(x) = a^x$. Deci relaţia se scrie $f(\frac{3}{5}) < f(2)$. Cum $\frac{3}{5} < 2$ iar între valorile lui f avem relaţia de ordine inversă rezultă că f este strict descrescătoare, ceea ce antrenează $0 < a < 1$.

b) Fie $f(x) = a^x$ şi relaţia rescrisă $f(-\frac{3}{5}) < f(-\frac{1}{2})$.
Cum $-\frac{3}{5} < -\frac{1}{2}$ implică aceeaşi relaţie de ordine şi între valorile funcţiei deducem că f este strict crescătoare. De aici baza exponenţialei trebuie să fie supraunitară, adică $a > 1$.

5. Dacă $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $2^a + 2^{-a} = 5$, atunci să se calculeze $4^a + 4^{-a}$ şi $8^a + 8^{-a}$.

R. Ridicând relaţia dată la pătrat şi apoi la cub obţinem:

$4^a + 2 + 4^{-a} = 25$, iar de aici $4^a + 4^{-a} = 23$ şi
$(2^a + 2^{-a})^3 = 125 \Leftrightarrow 2^{3a} + 2^{-3a} + 3 \cdot 2^a \cdot 2^{-a}(2^a + 2^{-a}) = 125 \Leftrightarrow$
$8^a + 8^{-a} = 110$.

6. Studiaţi monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în cazurile:

1) $f(x) = 2^x + 3^x$: 2) $f(x) = (\frac{1}{2})^x + (\frac{1}{3})^x$: 3) $f(x) = 1 + \frac{1}{2^x}$;

4) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$

R. 1) Funcţia dată este suma a două funcţii $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3^x$. Cum funcţiile f_1, f_2 sunt strict crescătoare (exponenţiale de bază supraunitară) atunci şi suma lor $f = f_1 + f_2$ este de asemenea strict crescătoare.

2) Funcţia este suma a două funcţii strict descrescătoare. Prin urmare este şi ea tot strict descrescătoare.

3) Funcţia este strict descrescătoare ca sumă dintre o funcţie constantă (care este descrescătoare) şi o funcţie strict descrescătoare.

4) Pentru studiul monotoniei unei astfel de funcţii se analizează monotonia ei în cele trei cazuri:
1) pe $(-\infty, 0)$ restricţia lui f este funcţia $f_1(x) = x$, care este strict crescătoare;
2) pe $[0, \infty)$ restricţia lui f este funcţia $f_2(x) = 2^x$, care este strict crescătoare;
3) Pentru $x_1 < 0 \leq x_2$ rezultă $f(x_1) < 0 < f(x_2) = 1$.
Aşadar funcţia f este strict crescătoare (pe $\mathbb{R}$).

7. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x - 3^x - 3 \cdot 2^x + 4$ nu este injectivă.

R. Trebuie arătat că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ pentru care $f(x_1) = f(x_2)$. Valorile x_1, x_2 se vor găsi după o scriere convenabilă a funcţiei f. Avem $f(x) = (2^x - 1)(3^x - 3) + 1$. Produsul este zero dacă cel puţin un factor este nul. Factorul $2^x - 1$ se anulează pentru $x_1 = 0$, iar factorul $3^x - 3$ este zero pentru $x_2 = 1$. Evident $x_1 \neq x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2) = 1$, ceea ce arată că f nu este injectivă.

8*. Să se arate că dacă $0 < a \leq b \leq c$, atunci $a^{c-a} b^{a-b} c^{b-c} \leq 1$.

R. Cum $\frac{a}{b} \leq 1$, $\frac{b}{c} \leq 1$ şi $c - a \geq 0$, $c - b \geq 0$ rezultă $(\frac{a}{b})^{c-a} \leq 1$, $(\frac{b}{c})^{c-b} \leq 1$. Pe de altă parte membrul stâng al relaţiei de demonstrat devine:

$a^{c-a} b^{a-b} c^{b-c} = (\frac{a}{b})^{c-a} (\frac{b}{c})^{c-b} \leq 1$.

9*. Să se studieze monotonia funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $f(x) = a^x + \frac{1}{a^x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; b) $f(x) = a^x + b^x$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.

R. a) Pentru că în structura funcţiei f intră funcţia exponenţială vom analiza două cazuri:

1) $a > 1$. Fie $0 < x_1 < x_2$. Avem

$f(x_1) - f(x_2) = (a^{x_1} - a^{x_2})(1 - \frac{1}{a^{x_1+x_2}})$, unde $a^{x_1} < a^{x_2}$ şi $\frac{1}{a^{x_1+x_2}} < 1$.

Prin urmare $f(x_1) - f(x_2) < 0$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce arată că pe $(0, \infty)$ funcţia f este strict crescătoare.

Cum $f(-x) = f(x)$, adică f este pară, rezultă că pe $(-\infty, 0)$ funcţia f este strict descrescătoare.

2) $0 < a < 1$. Există $b > 1$ astfel încât $a = \frac{1}{b}$. Funcţia se scrie

$f(x) = \frac{1}{b^x} + b^x$ şi am ajuns la cazul 1).

b) Dacă $a, b > 1$, atunci funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ fiind suma a două funcţii strict crescătoare. Dacă $0 < a, b < 1$, atunci funcţia f este strict descrescătoare fiind suma a două funcţii strict descrescătoare. Dacă $a > 1$, $0 < b < 1$ (sau $0 < a < 1$, $b > 1$) atunci funcţia f nu este monotonă.

10*. Să se studieze monotonia funcţiei $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$.

R. Dacă $a = b$, atunci funcţia devine $f(x) = a \cdot 2^{\frac{1}{x}}$. Cum funcţia $g(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ este compunerea dintre o funcţie strict descrescătoare $x \to \frac{1}{x}$ şi alta strict crescătoare $x \to 2^x$ rezultă o funcţie strict descrescătoare. Produsul dintre o astfel de funcţie şi o constantă pozitivă dă o funcţie, de asemenea, strict descrescătoare.

Dacă $a > b$, atunci funcţia f se scrie $f(x) = a[(\frac{b}{a})^x + 1]^{\frac{1}{x}}$.

Fie $0 < x_1 < x_2$. Atunci $(\frac{b}{a})^{x_1} + 1 > (\frac{b}{a})^{x_2} + 1$, iar de aici avem inegalităţile

$[(\frac{b}{a})^{x_1} + 1]^{\frac{1}{x_1}} > [(\frac{b}{a})^{x_2} + 1]^{\frac{1}{x_1}} > [(\frac{b}{a})^{x_2} + 1]^{\frac{1}{x_2}}$, ceea ce arată că

$f(x_1) > f(x_2)$, adică f este strict descrescătoare.

Analog se tratează cazul $a < b$.

11*. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty) - \{1\}$, $ad = bc$. Să se determine minimul funcţiei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^{-x} + b^x + c^x + d^{-x}$.

R. Pentru perechile de numere (a^{-x}, d^{-x}), (b^x, c^x) scriem inegalitatea mediilor şi avem:

$a^{-x} + d^{-x} \geq 2\sqrt{(ad)^{-x}}$, (cu egalitate dacă $x = 0$)

$b^x + c^x \geq 2\sqrt{(bc)^x}$, (cu egalitate dacă $x = 0$)

De aici (prin adunare) $f(x) \geq 2(\sqrt{(ad)^{-x}} + \sqrt{(bc)^x})$.

Pentru termenii din paranteză se mai aplică o dată inegalitatea mediilor şi avem: $\sqrt{(ad)^{-x}} + \sqrt{(bc)^x} \geq 2\sqrt[4]{(\frac{bc}{ad})^x}$, (cu egalitate dacă $x = 0$)

Cum $bc = ad$ avem $f(x) \geq 4$, cu egalitate dacă $x = 0$.

Aşadar $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 4 = f(0)$.

Probleme propuse

1. Cum se numeşte funcţia u^v dacă:
   1) u este argument şi v este o constantă;
   2) u este o constantă pozitivă şi v este un argument ?

2. Care sunt valorile pe care le ia puterea $a^{\frac{m}{n}}$ pentru $a < 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, dacă: a) m este par, n este impar; b) m este impar, n este impar;
   c) m este impar, n este par ?

3. Utilizând graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 3^x$, trasaţi graficele următoarelor funcţii:
   a) $f_1 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_1(x) = 3^{x+1}$; b) $f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_2(x) = 3^{x-1}$;
   c) $f_3 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_3(x) = 3^x + 1$; d) $f_4 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_4(x) = 3^{|x|}$;
   e) $f_5 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_5(x) = 3^{-x+1}$;
   f) $f_6 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_6(x) = 3^{-x+2}$;
   g) $f_7 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_7(x) = 3^{-|x|}$.

4. 1) Care din funcţiile exponenţiale $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = \sqrt{2}^x$ creşte mai repede cu creşterea argumentului x dacă $x > 0$?

   2) Care din funcţiile exponenţiale $f_3, f_4 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f_4(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ descreşte mai repede cu creşterea argumentului x dacă $x < 0$?

5. Indicaţi cum este posibilă trasarea graficelor unor funcţii date cu ajutorul funcţiei $f(x) = 2^x$ în cazurile:
   1) $f(x) = -2^x$; 2) $f(x) = 3 \cdot 2^x$; 3) $f(x) = -2 \cdot 2^x$;
   4) $f(x) = 2^{\frac{1}{2}}$; 5) $f(x) = 2^{2x}$.

6. 1) Este posibil de a obţine pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 3^x$, cea mai mică şi cea mai mare valoare ?
   2) Aceeaşi problemă pentru funcţiile $f_1(x) = 3^{|x|}$, $f_2(x) = 3^x + 3^{-x}$.

7. Care din funcţiile de mai jos este strict crescătoare şi care strict descrescătoare ?
   1) $f(x) = 5^x$; 2) $f(x) = (0,1)^x$; 3) $f(x) = \sqrt{3}^x$; 4) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

8. Cum este situat graficul funcţiei exponenţiale $f(x) = a^x$ în raport cu dreapta $y = 1$ în cazurile $0 < a < 1$ şi $a > 1$?

9. Determinați cea mai mare și cea mai mică valoare (dacă există) pentru funcțiile următoare:
1) $f(x)=2^{\sqrt{1-x}}$; **2)** $f(x)=2^{\sqrt{1-x^2}}$; **3)** $f(x)=(\frac{1}{3})^{\sqrt{4-x^2}}$;
4) $f(x)=\frac{1}{2^{|x|}}$; **5)** $f(x)=4^{\sin x}$; **6)** $f(x)=4^{|\sin x|}$;
7) $f(x)=3^{1-\cos x}$; **8)** $f(x)=2+2^{1+\cos x}$; **9)** $f(x)=3^{2x}-2\cdot 3^{x+2}+8$.

10. Comparați următoarele puteri cu unitatea:
$(\frac{2}{3})^{\frac{4}{5}}$, $(\frac{5}{3})^{\frac{3}{4}}$, $(\frac{1}{2})^{-\frac{6}{7}}$, $(\frac{3}{2})^{-\frac{4}{5}}$, $(0,21)^{0,1}$, $(\sqrt{2})^{-1,2}$.

11. Comparați numerele m și n dacă:
1) $(\frac{3}{5})^m<(\frac{3}{5})^n$; **2)** $(1,5)^m>(1,5)^n$; **3)** $(0,3)^m>(0,3)^n$.

12. Comparați perechile de puteri:
1) $(\frac{3}{5})^2$ și $(\frac{3}{5})^{-1}$; **2)** $(2,5)^{-\frac{4}{5}}$ și $(2,5)^{-\frac{2}{6}}$; **3)** $(\frac{1}{2})^{-5,3}$ și $(\frac{1}{2})^{-6,3}$;
4) $\left(\sqrt{3}\right)^{-9}$ și $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$; **5)** $(\frac{3}{4})^{\frac{7}{6}}$ și $(\frac{3}{4})^{\frac{8}{7}}$; **6)** $(1,5)^{-2}$ și $(1,5)^0$.

13. Ce concluzie poate fi trasă relativ la exponentul x dacă:
1) $3^x=8$; **2)** $(\frac{2}{3})^x=\frac{1}{5}$; **3)** $(\frac{2}{3})^x=2,5$; **4)** $(\frac{7}{3})^x=\frac{1}{2}$.

14. Ce concluzie poate fi trasă asupra bazei pozitive a dacă:
1) $a^{\frac{2}{5}}>a^{\frac{2}{7}}$; **2)** $a^{\frac{2}{3}}>a$; **3)** $a^{-\frac{1}{6}}<a^{\frac{7}{6}}$; **4)** $a^{0,3}>1$;
5) $a^{\frac{4}{3}}<a^{\frac{4}{5}}$; **6)** $a^{-0,7}>a^{-\frac{4}{5}}$.

15. Reprezentați graficele funcțiilor:
1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min(2^x,2^{-x})$;
2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max(2^x,2^{-x})$.

16. Dacă $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea $3^a+3^{-a}=4$, atunci să se calculeze
1) 9^a+9^{-a}; **2)** 27^a+27^{-a}.

17. Fie funcțiile $\mathrm{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (sinus hiperbolic), $\mathrm{ch}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (cosinus hiperbolic) definite prin relațiile:
$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ($e\approx 2,71828...$ este un număr irațional).
Să se arate că:
1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$ (formula fundamentală a trigonometriei hiperbolice);
2) $\mathrm{sh}\,(x\pm y)=\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{ch}\,x\mathrm{sh}\,y$; **3)** $\mathrm{ch}\,(x\pm y)=\mathrm{ch}\,x\mathrm{ch}\,y\pm\mathrm{sh}\,x\mathrm{sh}\,y$;
4) $\mathrm{sh}\,2x=2\mathrm{sh}\,x\mathrm{ch}\,x$; **5)** $\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

18. Studiați monotonia următoarelor funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
1) $f(x)=1+2^x$; **2)** $f(x)=5+(\frac{1}{3})^x$; **3)** $f(x)=3^x+5^x$;
4) $f(x)=(\frac{2}{3})^x+(\frac{3}{5})^x$; **5)** $f(x)=\frac{3^x+5^x}{2^x}$; **6)** $f(x)=\frac{2^x+3^x}{5^x}$;
7) $f(x)=1-\frac{3}{4^x}$; **8)** $f(x)=3^x-3^{-x}$;

9 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x\le 0\\ -x-1, & x>0\end{cases}$; **10** $f(x)=\begin{cases}3^x, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases}$;

11 $f(x)=\begin{cases}-5^x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$; **12** $f(x)=\begin{cases}-\left(\frac{1}{3}\right)^x, & x\le 0\\ x-1, & x>0.\end{cases}$;

19 Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=10^x-4\cdot 5^x-5\cdot 2^x+23$ nu este injectivă.

20. Fie $0<a<1$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+(1-a)^x$. Să se studieze monotonia funcției și să se arate că $f(x)>1$, dacă $x<1$ și $0<f(x)<1$ dacă $x>1$.

21. Să se studieze monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x-\frac{1}{a^x}$, $a>0$, $a\ne 1$.

22. Să se studieze monotonia funcției $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$,
$f(x)=(1+a)^x-a^x$, $a>0$, $a\ne 1$.

23*. Să se studieze monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^{b^x}$, $a,b>0$.

24*. Fie $a>1$ și funcțiile $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+a^{\frac{1}{x}}$ și $g:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=a^x+a^{\frac{1}{x}}$.
Arătați că:
1) f nu este o funcție injectivă; 2) g este o funcție injectivă.

25*. Fie $a>1$ și funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=xa^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}a^x$.
Să se arate că f admite o valoare minimă și să se determine această valoare.

26*. 1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x+a^{1-x}$, $a>0$, $a\ne 1$.
Să se studieze monotonia funcției f.
2) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^xb^{1-x}+a^{1-x}b^x$, $a,b>0$, $a,b\ne 1$.
Să se studieze monotonia lui f.

1.3. FUNCȚIA LOGARITMICĂ

Definiția logaritmului unui număr pozitiv

Definiție. Fie $a>0$, $a\ne 1$ și $x>0$. Se numește **logaritmul numărului x în baza a**, și se notează $\log_a x$, numărul real y definit prin: $y=\log_a x\Leftrightarrow a^y=x$.

Observaţii. 1) Nu se poate defini logaritmul unui număr real negativ x, deoarece $a^y > 0$, $(\forall)\, y \in \mathbb{R}$.

2) Definiţia logaritmului unui număr pozitiv implică trei chestiuni:

a) cele două notaţii $y = \log_a x$ şi $a^y = x$ au acelaşi înţeles;

b) numărul x trebuie să fie strict pozitiv;

c) dacă $a > 0$, $a \neq 1$ şi $x > 0$, atunci:

$$a^{\log_a x} = x$$

Această identitate se numeşte **identitatea logaritmică fundamentală** şi afirmă că : logaritmul unui număr pozitiv într-o bază este exponentul la care se ridică baza pentru a obţine numărul.

Exerciţii rezolvate

1. Să se scrie următoarele egalităţi sub formă logaritmică:

a) $2^3 = 8$; b) $5^0 = 1$; c) $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

R. Utilizăm definiţia logaritmului unui număr pozitiv x:

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

a) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$; b) $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$;

c) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$.

2. Să se scrie următoarele egalităţi în formă exponenţială:

a) $\log_{10} 100 = 2$; **b)** $\log_3 \frac{1}{27} = -3$; **c)** $\log_5 1 = 0$.

R. Utilizăm definiţia logaritmului unui număr pozitiv x : $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$. Deci: **a)** $\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$;

b) $\log_3 \frac{1}{27} = -3 \Leftrightarrow 3^{-3} = \frac{1}{27}$; **c)** $\log_5 1 = 0 \Leftrightarrow 5^0 = 1$.

3. Arătaţi următoarele egalităţi:

a) $\log_2 1024 = 10$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8$;

c) $\log_a \sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

R. a) Folosim definiţia logaritmului unui număr strict pozitiv. Deci $\log_2 1024 = 10 \Leftrightarrow 2^{10} = 1024$, ceea ce-i adevărat.

b) $\log_{\frac{1}{2}} 256 = -8 \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{-8} = 256 \Leftrightarrow 2^8 = 256$, adevărat.

c) Se aduce la o formă mai simplă argumentul logaritmului. Găsim

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{1}{2}}.$$

Deci $\log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ deoarece $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

4. Plecând de la definiţia logaritmului unui număr, determinaţi x dacă:

a) $\log_x 2 = 3$; **b)** $\log_4 x = \frac{1}{2}$; **c)** $\log_4 8 = x$.

R. Se aplică definiţia logaritmului unui număr pozitiv. Avem:

a) $\log_x 2 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 2$. De aici $x = \sqrt[3]{2}$.

b) $\log_4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = 2$.

c) $\log_4 8 = x \Leftrightarrow 4^x = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

5. Să se calculeze următorii logaritmi:

a) $\log_3 \sqrt{\frac{1}{9}}$; **b)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32}$; **c)** $\log_3 \log_2 \log_9 81$.

R. a) Aceeaşi definiţie a logaritmului unui număr pozitiv ne permite să scriem

$$\log_3 \sqrt{\frac{1}{9}} = y \Leftrightarrow 3^y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^y = 3^{-1} \Leftrightarrow y = -1.$$

Deci $\log_3 \sqrt{\frac{1}{9}} = -1$.

b) Fie $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = y \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^y = (32)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2^{-y} = 2^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{3}$. Deci $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = -\frac{5}{3}$.

c) Evaluăm cel mai interior logaritm şi avem $\log_9 81 = \log_9 9^2 = 2$. Din acest număr calculăm $\log_2 2 = 1$. În final acum: $\log_3 1 = 0$.

Exerciţii propuse

1. Să se scrie următoarele egalităţi sub formă logaritmică:

1) $2^4 = 16$; 2) $10^3 = 1000$; 3) $3^0 = 1$; 4) $125^{\frac{1}{3}} = 5$;

5) $3^{-3} = \frac{1}{27}$; 6) $(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

2. Să se scrie următoarele egalităţi în formă exponenţială:

1) $\log_{10} 0,01 = -2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$; 3) $\log_{10} 10000 = 4$;

4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; $\log_2 32 = 5$; 5) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$.

3. Verificaţi următoarele egalităţi:

1) $\log_3 729 = 6$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$; 3) $\log_{10} \frac{1}{10\sqrt{10}} = -\frac{3}{2}$;

4) $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$; 5) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{7}{8}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

4. Determinaţi logaritmii următoarelor numere:

1) 27, 1, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{9}$, $\frac{9}{\sqrt[4]{3}}$, $3^{\sqrt{3}}$, 2187, $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ în baza 3;

2) 2, 4, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{32}$, 32, 64, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}$ în baza $\frac{1}{2}$.

5. Plecând de la definiţia logaritmului unui număr, determinaţi x dacă:

1) $\log_x 3 = 3$; 2) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$; 3) $\log_{25} 125 = x$.

6. Calculaţi:

1) $\log_6 1296$; 2) $\log_2 \frac{1}{16}$; 3) $\log_{\frac{1}{7}} \sqrt[3]{49}$; 4) $\log_{49} \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$; 5) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64}$;

6) $\log_8(\log_4(\log_2 16))$; 7) $\log_3(\log_2(\log_2 256))$; 8) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_7(2^{\log_2 49}))$;

9) $\log_4(\log_4(\log_3 81))$; 10) $\log_{\frac{1}{6}}(\log_2(5^{\log_5 64}))$.

7. Rezolvaţi ecuaţiile de mai jos:

1) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; 2) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$; 3) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x \frac{1}{125} = -2$;
5) $\log_x \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$; 6) $\log_7 x = 0$; 7) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$; 8) $\log_{0,1} x = -1$;
9) $\log_{3\sqrt{3}} x = -\frac{3}{2}$; 10) $\log_{\frac{1}{25}} 5 = x$; 11) $\log_{3\sqrt{3}} 27 = x$;
12) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{16} = x$.

8. Precizaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care există numerele:
1) $\log_3(x^2 - 3x + 2)$; 2) $\log_{x^2-x} 5$; 3) $\log_{x+1}(x^2 - \frac{1}{2}x)$.

9. Pe baza identităţii logaritmice fundamentale calculaţi:
1) $2^{\log_2 8}$; 2) $3^{-\log_3 3}$; 3) $25^{\log_5 3}$; 4) $(2^{\log_2 5})^2$; 5) $3^{3\log_3 2}$;
6) $25^{-\log_5 10}$; 7) $49^{\frac{1}{2}\log_7 \frac{1}{4}}$; 8) $2^{2-\log_2 5}$; 9) $2^{2\log_2 5+\log_2 3}$;
10) $8^{\log_2 \sqrt[3]{121}+\frac{1}{3}}$; 11) $3^{1+\log_3 7} - 2^{\log_4 121}$.

Notă istorică. Două numere au servit în mod deosebit ca baze pentru logaritmi:
1) **numărul iraţional** $e \approx 2,71828$. În acest caz în loc să scriem $\log_e x$ notăm $\ln x$. Aceşti logaritmi se numesc **logaritmi neperieni** (alegerea acestui număr pare stranie, dar se explică prin anumite proprietăţi remarcabile care l-au făcut unul din numerele cele mai importante din matematică). Numele acestor logaritmi vine de la baronul scoţian John Neper (1550-1617) care este considerat inventatorul logaritmilor. El le-a consacrat în 1614 o lucrare intitulată "Description des merveilleuse règles des logarithmes et de leur usage...".
În această lucrare, noţiunea de bază nu este încă explicitată. Calculele arată totuşi că aceasta are o valoare apropiată de $\frac{1}{e}$. Logaritmii lui Neper nu se identifică deci cu cei pe care, astăzi, îi numim neperieni. Elveţianul Jost Bürgi (1552-1632) a publicat de asemenea o tablă de logaritmi în 1620, dar a descoperit acest concept câţiva ani mai devreme, posibil chiar înaintea lui Neper. În tabla lui Bürgi, logaritmii sunt notaţi în roşu, el însuşi numindu-i "numerele roşii". Şi aici noţiunea de bază încă nu apărut;
2) **numărul** 10. În acest caz în loc să scriem $\log_{10} x$ notăm $\lg x$. Aceşti logaritmi se numesc **logaritmi zecimali.**
Matematicianul englez Henry Briggs (1556-1630) este cel care a construit şi publicat, în 1624, prima tablă a logaritmilor zecimali.

Proprietăţile logaritmilor

Utilizând proprietăţile puterilor cu exponenţi reali

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy},$$

vom stabili proprietăţi pentru logaritmi.

1. Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci
$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Demonstraţie. Avem:
$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$ şi $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$. ■

2. Dacă $x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, atunci
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$
(Logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere.)

Demonstraţie. Notăm $\log_a x = m$, $\log_a y = n$. De aici
$a^m = x$, $a^n = y$ şi $a^m \cdot a^n = a^{m+n} = xy$.
Prin urmare $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. ■

Observaţii. 1) Formula de mai sus se extinde pentru k numere strict pozitive $x_1, x_2, \cdots, x_k$ când avem
$$\log_a(x_1 x_2 \cdots x_k) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_k$$
sau utilizând simbolurile $\sum$ şi $\prod$ avem:
$$\log_a\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \log_a x_i.$$
Dacă numerele x_i, $i = \overline{1,k}$ sunt egale $x_i = x$, $(\forall)\, i = \overline{1,k}$, atunci

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

Logaritmul unei puteri cu exponent natural este egal cu produsul dintre exponent şi logaritmul bazei puterii. Vom vedea formula rămâne valabilă şi pentru puteri cu exponent real.

2) Dacă $x_1 x_2 > 0$, atunci $\log_a(x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$.

3. Dacă $x, y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, atunci
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
(Logaritmul câtului este egal cu diferenţa dintre logaritmul numărătorului şi logaritmul numitorului)

Demonstraţie. Avem:
$\log_a x = \log_a(\frac{x}{y} \cdot y) = \log_a(\frac{x}{y}) + \log_a y$. De aici $\log_a x - \log_a y = \log_a(\frac{x}{y})$. ■

Observaţii. 1) Dacă $xy > 0$, atunci $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y|$.

2) Dacă $x > 0$, atunci

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

4. Dacă $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, atunci

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

(Logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii şi logaritmul numărului)

Demonstraţie. Fie $\log_a x = m$ şi deci $a^m = x$. De aici $x^\alpha = (a^m)^\alpha = a^{m\alpha} \Leftrightarrow \log_a x^\alpha = m\alpha = \alpha \log_a x$. ■

Observaţii. 1) Dacă $\alpha = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, atunci $\log_a x^{2m} = 2m \log_a |x|$.

Exemplu. Numărul $\log_a(x-1)^2$ există pentru $x \neq 1$ şi

$$\log_a(x-1)^2 = 2\log_a|x-1| = \begin{cases} 2\log_a(x-1), & x > 1 \\ 2\log_a(1-x), & x < 1. \end{cases}$$

2) Dacă $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, atunci $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$.

5. (Formula de schimbare a bazei)
Dacă $x > 0$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, atunci

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(Formula dă trecerea de la logaritmul unui număr în baza a la logaritmul aceluiaşi număr în noua bază b)

Demonstraţie. Fie $\log_a x = m$, $\log_b x = n$. Atunci $x = a^m$, $x = b^n$. De aici $a^m = b^n$ şi deci $\log_a a^m = \log_a b^n$ sau $m \log_a a = n \log_a b$ sau $m = n \log_a b$, adică $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$, (1).
Dacă punem aici $x = a$, atunci obţinem $1 = \log_b a \cdot \log_a b$.
Deci $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
Acum (1) devine $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. ■

Observaţii. 1) Pentru a reţine uşor formula de schimbare a bazei la trecere de la baza a la baza b să observăm că în membrul drept este cât de logaritmi în noua bază b, având ca argumente pe x şi respectiv baza veche după schema de mai jos

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

2) În demonstraţie am stabilit un rezultat util în aplicaţii

Dacă $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, atunci

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

3) Dacă $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, atunci:
$\log_{a^\beta}(x^\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}\log_a x$.

Demonstraţie. Se trece logaritmul din membrul stâng în baza a şi avem: $\log_{a^\beta}(x^\alpha) = \frac{\log_a x^\alpha}{\log_a a^\beta} = \frac{\alpha \log_a x}{\beta \log_a a} = \frac{\alpha}{\beta}\log_a x$. ■

4) Dacă $x, y > 0$, $y \neq 1$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, atunci

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}.$$

Demonstraţie. Observăm că trebuie să trecem de la logaritmi în baza a (din membrul stâng) la logaritmi în baza b (memebrul drept). Folosind formula de schimbare a bazei membrul stâng se scrie

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\frac{\log_b x}{\log_b a}}{\frac{\log_b y}{\log_b a}} = \frac{\log_b x}{\log_b y}.$$

5) Această proprietate este des utilizată într-o categorie largă de aplicaţii (egalităţi, ecuaţii, inecuaţii, etc.) în care apar radicali de ordine diferite. Pentru prelucrarea expresiilor, aducerea lor la o formă mai simplă, se trec logaritmii în aceeaşi bază şi se aplică proprietăţile 1)-5).

6. Dacă $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, atunci

$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}.$$

Probleme rezolvate

1. Să se aducă la o formă mai simplă

a) $\sqrt{(25)^{\frac{1}{\log_6 5}} + (49)^{\frac{1}{\log_8 7}}}$; b) $-\log_8(\log_4(\log_2 16))$.

R. a) Termenii sumei de sub radical se prelucrează astfel:

$(25)^{\frac{1}{\log_6 5}} = (25)^{\log_5 6} = (5^2)^{\log_5 6} = (5^{\log_5 6})^2 = (6)^2 = 36$,

$(49)^{\frac{1}{\log_8 7}} = (49)^{\log_7 8} = (7^2)^{\log_7 8} = (7^{\log_7 8})^2 = (8)^2 = 64.$
Deci $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

b) Avem succesiv:
$-\log_8(\log_4(\log_2 2^4)) = -\log_8(\log_4(4\log_2 2)) = -\log_8(\log_4 4) = -\log_8 1 = 0.$

2. Să se calculeze:
a) $\lg\frac{1}{2} + \lg\frac{2}{3} + \lg\frac{3}{4} + \cdots + \lg\frac{99}{100}$;

b) $\log_2\sqrt{2} + \log_2\sqrt{2+\sqrt{2}} + \log_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \log_2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

c) $\log_a\sqrt{x} + \log_a\sqrt{x^3} - 2\log_a x$, $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

R. a) Vom restrânge suma de logaritmi utilizând formula
$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$.
Avem $\lg(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}) = \lg\frac{1}{100} = \lg 10^{-2} = -2\lg 10 = -2$.

b) Aceeaşi formulă ne permitem să scriem
$\log_a\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$
$\log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})} =$
$\log_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} = \log_2\sqrt{2}\sqrt{2} = \log_2 2 = 1.$

c) Expresia se restrânge astfel
$\log_a\sqrt{x}\sqrt{x^3} - \log_a x^2 = \log_a(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^3}}{x^2}) = \log_a\frac{x^2}{x^2} = \log_a 1 = 0.$

3. Calculaţi, în fiecare din cazurile de mai jos, valoarea numărului real x dacă:
a) $\log_3 x = 2 + 3\log_3 5 - 2\log_3 4$; **b)** $\lg x = -1 + 2\lg 3 - 3\lg 5$.

R. Pentru fiecare caz se restrânge membrul drept folosind proprietăţile $k = \log_a a^k$, $\alpha\log_a x = \log_a x^\alpha$, $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a(\frac{x}{y})$.

a) $2 + 3\log_3 5 - 2\log_3 4 = \log_3 3^2 + \log_3 5^3 - \log_3 4^2 =$
$= \log_3(3^2\cdot 5^3) - \log_3 4^2 = \log_3(\frac{3^2\cdot 5^3}{4^2})$.
Din $\log_3 x = \log_3(\frac{3^2\cdot 5^3}{4^2}) \Rightarrow x = \frac{3^2\cdot 5^3}{4^2}$ (deoarece logaritmul unui număr pozitiv este unic).

b) Membrul drept devine:
$-1 + 2\lg 3 - 3\lg 5 = \lg 10^{-1} + \lg 3^2 - \lg 5^3 = \lg(\frac{9}{10}) - \lg 125 = \lg(\frac{9}{1250})$
Din $\lg x = \lg(\frac{9}{1250})$ se deduce $x = \frac{9}{1250}$.

4. Să se calculeze: **a)** $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$; **b)** $\lg 25$, dacă $\lg 2 = a$;
c) $\log_3 18$, dacă $\log_3 12 = a$; **d)** $\log_{12} 60$, dacă $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$.

R. a) Se aduc toţi logaritmii în baza 2 şi avem:
$\log_2 24\cdot\log_2 96 - \log_2 192\cdot\log_2 12 =$
$\log_2(2^3\cdot 3)\cdot\log_2(2^5\cdot 3) - \log_2(2^6\cdot 3)\cdot\log_2(2^2\cdot 3) =$
$(\log_2 2^3 + \log_2 3)(\log_2 2^5 + \log_2 3) - (\log_2 2^6 + \log_2 3)(\log_2 2^2 + \log_2 3) =$
$(3+\log_2 3)(5+\log_2 3) - (6+\log_2 3)(2+\log_2 3) =$
$(15 + 8x + x^2) - (12 + 8x + x^2) = 3$, unde $x = \log_2 3$.

b) Avem $\lg 25 = \lg 5^2 = 2\lg 5 = 2\lg(\frac{10}{2}) = 2(\lg 10 - \lg 2) = 2(1-a)$.

c) Metoda întâi. Aducem la o formă mai simplă $\log_3 18$.
$\log_3 18 = \log_3(3^2\cdot 2) = \log_3 3^2 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$
şi căutăm să exprimăm pe 2 din $\log_3 2$ în funcţie de numerele 12 şi 3 din $\log_3 12 = a$. Avem:
$2 = \sqrt{\frac{12}{3}}$ şi deci $\log_3 2 = \log_3\sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{1}{2}(\log_3 12 - \log_3 3) = \frac{1}{2}(a-1)$.
Asadar $\log_3 18 = 2 + \frac{1}{2}(a-1) = \frac{a+3}{2}$.

Metoda a doua. Constă în a lucra, atât în baza cât şi în argumentul logaritmului numai cu numere prime.
Prelucrăm astfel cei doi logaritmi
$\log_3 18 = \log_3(3^2\cdot 2) = 2 + \log_3 2$ şi
$a = \log_3 12 = \log_3(2^2\cdot 3) = 2\log_3 2 + 1$.
Din ultima egalitate $\log_3 2 = \frac{a-1}{2}$. Prin urmare $\log_3 18 = 2 + \frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}$.

d) Avem succesiv: $\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2(4\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(4\cdot 3)} = \frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 3}$.
Notând $x = \log_2 3$, $y = \log_2 5$, avem: $\log_{12} 60 = \frac{2+x+y}{2+x}$.
Acum va trebui să exprimăm pe a şi b în funcţie de x şi y, ca apoi din acest sistem să determinăm pe x şi y în raport de a şi b. În final $\log_{12} 60$ va fi exprimat în funcţie de a, b.
Avem:
$a = \log_6 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2(2\cdot 3\cdot 5)}{\log_2(2\cdot 3)} = \frac{1+x+y}{1+x}$.
$b = \log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2(8\cdot 3)}{\log_2(3\cdot 5)} = \frac{3+x}{x+y}$.
Sistemul $\begin{cases} \frac{1+x+y}{1+x} = a \\ \frac{x+3}{x+y} = b \end{cases}$ are soluţia $x = \frac{b+3-ab}{ab-1}$, $y = \frac{2a-b-2+ab}{ab-1}$.
Găsim $\log_{12} 60 = \frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

5. Să se arate că numărul $\lg 2$ este iraţional.
R. Presupunem prin reducere la absurd că $\lg 2$ ar fi raţional. Deci $\lg 2 = \frac{m}{n}$, $m, n\in\mathbb{N}^*$, $(m,n) = 1$. De aici $10^{\frac{m}{n}} = 2$ sau prin ridicarea egalităţilor la puterea a n-a rezultă $10^m = 2^n$, egalitate imposibilă deoarece membrul stâng se divide prin 10 în timp ce membrul drept nu se divide. Contradicţie.

6. Calculaţi $[\log_2 25]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui $a\in\mathbb{R}$.

R. Ideea este de a încadra numărul 25 între două puteri consecutive ale lui 2. Avem: $2^4 < 25 < 2^5$.
Dacă $\log_2 5 = x$, atunci $2^x = 25$ şi deci $2^4 < 2^x < 2^5$, ceea ce înseamnă că $4 < x = \log_2 25 < 5$, adică $[\log_2 25] = 4$.

7. Să se arate că dacă $a, b, x > 0$ şi diferite de unu cu $a \neq b$, atunci

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \log_b x}{\log_b x - \log_a x}.$$

R. Se aduc toţi logaritmii în baza x. Membrul stâng devine $\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{1}{\log_x a - \log_x b}$, iar membrul drept are aceeaşi formă.

8. Fie $x, y > 0$, $2x > 3y$. Să se determine $\frac{x}{y}$ dacă

$$\lg(2x - 3y) = \tfrac{1}{2}(\lg x + \lg y).$$

R. Se aduce egalitatea la forma
$\lg(2x-3y) = \lg\sqrt{xy}$ sau (logaritmul unui număr pozitiv este unic) $2x - 3y = \sqrt{xy} \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 13xy = 0$. Se împarte această relaţie prin $y^2 \neq 0$ şi rezultă $4(\frac{x}{y})^2 - 13(\frac{x}{y}) + 9 = 0$. Notând $t = \frac{x}{y}$, ecuaţia $4t^2 - 13t + 9 = 0$ dă $t_1 = \frac{9}{4}$, $t_2 = 1$.
Se reţine doar $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$ pentru care se verifică $2x > 3y$.

9. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 = 7ab$, $a, b > 0$, atunci

$$\lg\tfrac{a+b}{3} = \tfrac{1}{2}(\lg a + \lg b).$$

R. Relaţia de demonstrat devine $\lg\frac{a+b}{3} = \lg\sqrt{ab}$, iar de aici (logaritmul unui număr pozitiv este unic) se deduce $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ sau $a+b = 3\sqrt{ab}$, care prin ridicare la pătrat este echivalentă cu $(a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7ab$.

Probleme propuse

1. Să se aducă la o formă mai simplă:
1) $-\log_2\log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}$; 2) $\lg(\lg\sqrt{\sqrt[5]{10}})$; 3) $(\frac{16}{25})^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$
4) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} \cdot 49^{\log_7 2}$; 5) $\log_2(\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}})$; 6) $8^{2-2\log_4\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3}\cdot 7^{\log_7 6}$
7) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{1023} 1024$;
8) $ma^{\log_c b} + nb^{\log_c a}$, $a, b, c \in (0, \infty) - \{1\}$.

2. Să se calculeze:
1) $\frac{\log_2 25}{\log_2 5}$; 2) $2\log_5\sqrt{5} + 3\log_2 8$; 3) $\log_3\frac{81}{\sqrt{3}} - 2\log_3 27$;
4) $\log_{33}\sqrt{33} + \log_{33}\sqrt{6+\sqrt{3}} + \log_{33}\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}} + \log_{33}\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$; 5) $\lg(\operatorname{tg} 40°)\lg(\operatorname{tg} 41°)\cdots\lg(\operatorname{tg} 50°)$;
6) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;
7) $\frac{1}{\log_a n} + \frac{1}{\log_{a^2} n} + \frac{1}{\log_{a^3} n}$; 8) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$;
9) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

3. Calculaţi, în fiecare din cazurile de mai jos, valoarea numărului real x: 1) $\log_2 x = 3 - 2\log_2 3 + 3\log_2 5$; 2) $\log_5 x = -1 + 3\log_5 2 - 2\log_5 3$;
3) $\log_5 x = \log_5(\frac{\sqrt{5}}{2}) + 2\log_5\sqrt[4]{5+\sqrt{5}} + \log_5\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

4. Să se calculeze:
1) $\frac{\log_3 135}{\log_{75} 3} - \frac{\log_3 45}{\log_{675} 3}$; 2) $\lg 5$, dacă $\lg 2 = a$; 3) $\lg 40$, dacă $\lg 2 = a$;
4) $\log_{100} 40$, dacă $\log_2 5 = a$; 5) $\log_6 16$, dacă $\log_{12} 27 = a$;
6) $\lg 45$, dacă $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$; 7) $\lg\frac{1}{600}$, dacă $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$;
8) $\log_3 5$, dacă $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$;
9) $\log_{35} 28$, dacă $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$;
10) $\log_2 360$, dacă $\log_3 20 = a$, $\log_3 15 = b$;
11) $\log_{275} 60$, dacă $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 11 = b$.

5. Să se arate că dacă $a = \log_{12} 18$ şi $b = \log_{24} 54$, atunci: $ab + 5(a - b) = 1$.

6. Arătaţi că numerele următoare sunt iraţionale:
1) $\lg 3$: 2) $\log_2 7$; 3) $\log_3 5$.

7. Arătaţi că : $\log_2 3 \cdot \log_5 7 \cdot \log_{11} 13 = \log_2 13 \cdot \log_5 3 \cdot \log_{11} 7$.

8. Calculaţi partea întreagă pentru următoarele numere:
1) $[\log_3 51]$: 2) $[\log_5 100]$.

9. Să se demonstreze următoarele egalităţi:
1) $\log_{ab} n = \frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n}$; 2) $\frac{\log_a n}{\log_{ab} n} = 1 + \log_a b$;
3) $\log_{bn}(an) = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$;
4) $\frac{1}{\log_a n} + \frac{1}{\log_{a^2} n} + \frac{1}{\log_{a^3} n} + \frac{1}{\log_{a^4} n} = 10\log_n a$;
5) $\log_a n \cdot \log_b n + \log_b n \cdot \log_c n + \log_c n \cdot \log_a n = \frac{\log_a n \cdot \log_b n \cdot \log_c n}{\log_{abc} n}$;
6) $\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{2000} N} = 1$, unde $N = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2000$.

10. Fie triunghiul ABC, dreptunghic în C, de laturi a, b, c. Dacă $c > b$, $c - b \neq 1$, $c + b \neq 1$, atunci $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

11. 1) Dacă $a, b > 0$, $a^2 + 4b^2 = 12ab$, atunci să se arate că $\lg\frac{a+2b}{4} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$;
2) Dacă $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$, $b^2 = ac$, atunci $\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$, $(\forall)\, x > 0$, $x \neq 1$.
3) Dacă $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$, $c \neq a$, $c \neq b$, atunci $ab = c \Leftrightarrow \log_a(\frac{a}{c}) = \log_{\frac{b}{c}} b$.

12. Dacă $x, y > 0$, $x > 2y$ şi $2\lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$, atunci să se calculeze $\frac{x}{y}$.

13. Dacă $a, b > 0$, $a, b, a+b \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$, atunci
$1 + \log_b a = \log_{a+b} a \Leftrightarrow \log_a x + \log_b x = \log_{a+b} x$.

14. Dacă $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$, atunci
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a}$.

15. Să se arate că:

$$2\left(\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab}} - \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\frac{a}{b}}}\right)\sqrt{\log_a b} =$$

$$= \begin{cases} 2, & b \geq a > 1 \\ 2\log_a b, & 1 < b < a. \end{cases}$$

Operaţia de logaritmare a unei expresii

Vom începe acest paragraf printr-un exemplu pentru a ilustra utilitatea operaţiei de logaritmare a unei expresii.

Să se calculeze numărul $N = \dfrac{3^{20} \cdot \sqrt[5]{1396} \cdot \sqrt[3]{275}}{5^{97} \cdot \sqrt[4]{320}}$.

După cum se poate vedea numerele 3^{20}, 5^{97} sunt foarte mari.
De asemenea radicalii care figurează în structura numărului sunt de ordin superior lui doi şi deci greu de calculat.
Desigur că ni se cere o valoare aproximativă a lui N.
Pentru aceasta se calculează $\lg N$ (logaritm zecimal de obicei).
În acest fel puterile a^k se transformă în $k \lg a$ deci într-un produs, câtul $\frac{a}{b}$ se transformă în diferenţă: $\lg(\frac{a}{b}) = \lg a - \lg b$, iar produsul ab în sumă $\lg(ab) = \lg a + \lg b$. Avem:
$\lg N = \lg(3^{20} \cdot \sqrt[5]{1396} \cdot \sqrt[3]{275}) - \lg(5^{97}\sqrt[4]{320}) = \lg 3^{20} + \lg 1396^{\frac{1}{5}} + \lg 275^{\frac{1}{3}} - (\lg 5^{97} + \lg 320^{\frac{1}{4}}) = 20\lg 3 + \frac{1}{5}\lg 1396 + \frac{1}{3}\lg 275 - 97\lg 5 - \frac{1}{4}\lg 320$.
Utilizând tabelele de logaritmi zecimali, sau un calculator de buzunar care are tasta lg se pot calcula aproximativ (cu 6 sau 7 zecimale) numerele $\lg 3$, $\lg 1396$, $\lg 275$, $\lg 5$, $\lg 320$, după care se efectuează celelalte calcule obţinând pentru $\lg N$ o valoare aproximativă v. Deci $\lg N \approx v$, iar de aici $N \approx 10^v$. De obicei tot din tabelele de logaritmi zecimali se găseşte valoarea aproximativă a lui N.
Prezenţa calculatoarelor electronice în şcoli şi capacitatea acestora de a efectua calcule complicate fac desuet acest tip de aplicaţii.
În concluzie:

> operaţia prin care numărului (expresiei) N i se asociază numărul (expresia) $\lg N$ se numeşte **operaţia de logaritmare.**

Probleme propuse

Să se logaritmeze expresiile:

1) $E = 2a$; **2)** $E = 3ab$; **3)** $E = 10(a^2 - b^2)$; **4)** $E = \frac{4ab}{3c}$;
5) $E = 17a^4b^3cd^2$; **6)** $E = a\sqrt[3]{b}$; **7)** $E = 2a\sqrt[3]{4b^2}$; **8)** $E = \sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}$;
9) $E = \frac{a^2b^3}{\sqrt[5]{d}}$; **10)** $E = 4a^3\sqrt[5]{\frac{c^2}{d}}$; **11)** $E = (\sqrt[3]{\frac{a}{2b}})^4$; **12** $E = \sqrt[5]{\frac{a^3b}{\sqrt{c}}}$;
13) $E = \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}}$; **14)** $E = \frac{1}{3}\sqrt{a\sqrt{b}}$; **15)** $E = \sqrt{2\sqrt{6\sqrt{5}}}$;
16) $E = \frac{2}{5}\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$; **17)** $E = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}}}$; **18)** $E = \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{ab}}\sqrt{\frac{a}{b}}}$;
19) $E = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{ab}}{b}}$; **20)** $E = \frac{10^{300} \cdot \sqrt[15]{2001}}{13^{121} \cdot \sqrt[4]{1999}}$; **21)** $E = \frac{5a^3\sqrt[5]{a^{13}b\sqrt[3]{ab}}}{b^5\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}$;
22) $E = \frac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}$; **23)** $E = \frac{a^2b^3c^4\sqrt[4]{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt{b}}\sqrt[5]{c^2\sqrt{a}}}$; **24)** $E = \frac{10^{35}11^{98} \cdot (\frac{13}{11})^{63}}{\sqrt[15]{901}\sqrt[10]{1015}}$.

Restrângerea unei expresii care conţine radicali

Restrângerea unei expresii în care apar logaritmi se face cu ajutorul formulelor:
$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a(\frac{x}{y})$, $k\log_a x = \log_a x^k$, $k = \log_a a^k$.

Exemplu. Să se determine x din egalitatea: $\lg x = 2\lg 3 - 2 + \lg 4 + \lg 5$.
R. Avem succesiv: $\lg x = \lg 3^2 - \lg 10^2 + \lg(4 \cdot 5)$ sau $\lg x = \lg \frac{3^2 \cdot 4 \cdot 5}{10^2}$ sau încă $\lg x = \lg \frac{9}{5}$. De aici $x = \frac{9}{5}$.

Probleme propuse

Să se determine x din egalităţile:

1) $\lg x = \lg 2 + \lg 5$; **2)** $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3$; **3)** $\lg x = 2\lg 3 - 3$;
4) $\lg x = 2\lg a + 3\lg b - 4\lg c$; **5)** $\lg x = 2\lg(a-b) - 3\lg(a+b)$;
6) $\lg x = 2\lg 5 - 2\lg 25 + \lg 4$; **7)** $\log_5 x = \frac{1}{2}\log_5 10 - \log_5 2 + \frac{1}{2}$;
8) $2\log_7 x = 2 - 3\log_7 x$; **9)** $\log_3 x = 2\log_3 4 - 3\log_3 2$.

Funcţia logaritmică

Am văzut că fiecărui număr $x > 0$, i-am asociat numărul unic real $y = \log_a x$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, numit logaritmul lui x în baza a.
De fapt am pus în evidenţă o funcţie definită pe $(0, \infty)$ cu valori în $\mathbb{R}$.
Mai precis are loc următoarea:

Definiţie. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \log_a x$ se numeşte **funcţia logaritmică de bază** a.

Proprietăţi ale funcţiei logaritmice

Cunoaşterea unor proprietăţi ale funcţiei logaritmice permite rezolvarea unor probleme teoretice cât şi practice.

1. Funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale.

Demonstraţie. Mai precis să arătăm că funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ este inversa funcţiei exponenţiale
$f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$.
Pentru aceasta trebuie să verificăm egalităţile de funcţii (vezi definiţia inversei unei funcţii):
$f \circ g = 1_{(0,\infty)}$, $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$.
Arătăm doar că $f \circ g = 1_{(0,\infty)}$. Pentru ca funcţiile să fie egale trebuie să arătăm că au:
1) acelaşi domeniu de definiţie (aici $(0, \infty)$),
2) acelaşi codomeniu (aici $(0, \infty)$) şi
3) punctual funcţiile să coincidă, adică $(\forall) y \in (0, \infty)$ să avem
$(f \circ g)(y) = 1_{(0,\infty)}(y) = y$.
Ori avem:
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\log_a y) = a^{\log_a y} = y$ (din definiţia logaritmului unui număr $y > 0$).
Deci egalitatea de funcţii se verifică.
Analog se procedează pentru a doua egalitate de funcţii. ■

Observaţie. Din faptul că g este bijectivă avem echivalenţa:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

Probleme rezolvate

1. Să se determine inversa funcţiei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$.
R. Aşa cum este definită funcţia aceasta este bijectivă fiind funcţia exponenţială de bază 2.
Pentru a determina funcţia inversă $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ se rezolvă ecuaţia $y = 2^x$, $y > 0$, în necunoscuta x. Soluţia unică este $x = \log_2 y$.
Avem: $\mathbb{R} \ni x \to y = 2^x \in (0, \infty)$, reprezintă funcţia directă f, iar corespondenţa inversă $(0, \infty) \ni y \to x \in \mathbb{R}$, $2^x = y$, reprezintă funcţia g.
Deci $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = x = \log_2 y$.

2. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 3^{x+1}$ este bijectivă şi să se determine inversa ei.
R. Se arată uşor că f este bijectivă probând că ecuaţia $f(x) = y$, $y > 0$ are o unică soluţie reală x. Ecuaţia $3^{x+1} = y \Leftrightarrow 3^x = \frac{y}{3} > 0$, care se ştie are o unică soluţie $x = \log_3 \frac{y}{3} = \log_3 y - 1$.
Funcţia inversă este dată de corespondenţa
$(0, \infty) \ni y \xrightarrow{g} x = \log_3 y - 1 \in \mathbb{R}$.

3. Precizaţi domeniile maxime de definiţie (D_g) pentru funcţiile următoare:
a) $g(x) = \log_5(x + 1)$; **b)** $g(x) = \log_3 |x + 2|$;
c) $g(x) = \log_{x-3}(x^2 - 3x + 2)$; **d)** $g(x) = \lg(3^x - 27)$.
R. Logaritmul are sens numai din numere strict pozitive. Deci:
a) Se impune condiţia $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Prin urmare $D_g = (-1, \infty)$;
b) Din condiţia $|x + 2| > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Deci $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$.
c) Avem condiţiile: 1) $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$ (pentru bază) şi
2) $x^2 - 3x + 2 > 0$, adică $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.
De aici $D_g = (3, \infty) - \{4\}$.
d) Din $3^x - 27 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 3^3$ se deduce $x > 3$. Deci $D_g = (3, \infty)$.

Probleme propuse

1. Să se determine inversa funcţiei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ în cazurile:
1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = 5^{x+1}$; 3) $f(x) = 7^{3x}$.
2. Precizaţi domniile maxime de definiţie (D_g) pentru funcţiile următoare:
1) $g(x) = \log_2(x - 1)$; 2) $g(x) = \log_5 |x - 3|$;
3) $g(x) = \lg(x^2 - 2x + 1)$; 4) $g(x) = \log_{x+1}(x + 2)$;
5) $g(x) = \log_{x-4}(x - 2)^2$; 6) $g(x) = \log_5(x^2 - 3x + 2)$;
7) $g(x) = \log_3(2^x - 16)$; 8) $g(x) = \lg(1 - (\frac{1}{2})^x)$;
9) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(0, 1 - (\frac{1}{10})^{2x})$; 10) $g(x) = \log_6(2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8)$.

Din proprietăţile logaritmilor rezultă proprietăţi pentru funcţia logarit-

mică:

2. Funcţia logaritmică face să-i corespundă produsului a două numere reale pozitive suma valorilor corespunzătoare ale funcţiei, adică $g(x_1x_2) = g(x_1) + g(x_2),\ (\forall)\, x_1, x_2 > 0.$

3. Funcţia logaritmică face să corespundă câtului a două numere reale pozitive diferenţa valorilor funcţiei, adică

$$g\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = g(x_1) - g(x_2),\ (\forall)\, x_1, x_2 > 0.$$

4. Funcţia logaritmică face să corespundă unei puteri a argumentului produsul dintre exponentul puterii şi valoarea funcţiei pentru argumentul considerat, adică

$$f(x_1^\alpha) = \alpha f(x_1),\ (\forall)\, x_1, x_2 > 0.$$

5. $\log_a 1 = 0$. Logaritmul lui 1 în orice bază este egal cu 0.

6. Monotonia funcţiei logaritmice
Dacă: $a > 1$, atunci $g(x) = \log_a x$ este **strict crescătoare**;
$0 < a < 1$, atunci $g(x) = \log_a x$ este **strict descrescătoare**.

Demonstraţie. Utilizăm rezultatul demonstrat la funcţii bijective:
Dacă $f : A \to B$ este bijectivă şi strict crescătoare (strict descrescătoare), atunci inversa sa $g : B \to A$ este strict crescătoare (strict descrescătoare).
Altfel spus funcţia directă şi funcţia inversă au aceeaşi monotonie.
Cum inversa funcţiei exponenţiale $f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ este funcţia logaritmică $g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_a x$, deducem că f, g au aceeaşi monotonie. ■

Observaţii. 1) S-ar fi putut proba monotonia lui g plecând de la definiţia acesteia şi de la definiţia logaritmului unui număr:
$x > 0,\ a^{\log_a x} = x$.
2) Monotonia funcţiei logaritmice este utilizată la rezolvarea inecuaţiilor (inegalităţilor) logaritmice.

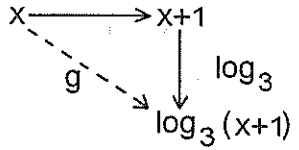
Avem echivalenţele:

Pentru $a > 1,\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$
Pentru $0 < a < 1,\ \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Probleme rezolvate

1. Precizaţi monotonia funcţiilor de mai jos:
a) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$; b) $g(x) = \lg x$; c) $g(x) = \log_3(x+1)$;
d) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$; e) $g(x) = \log_2(1-3x)$.

R. a) Cum baza logaritmului $a = \frac{1}{3}$ este subunitară se deduce că g este strict descrescătoare;
b) Baza funcţiei logaritmice este $a = 10 > 1$ rezultă g este strict crescătoare.
c) Să observăm că g este compunerea a două funcţii strict crescătoare: funcţia de gradul întâi $x \to x + 1$ şi funcţia logaritmică de bază $3 > 1$.



Deci g este strict crescătoare.
d) Funcţia g este strict descrescătoare fiind compunerea dintre o funcţie strict crescătoare (funcţia de gradul întâi $x \to x - 1$) şi o funcţie strict descrescătoare (funcţia logaritmică $x \to \log_{\frac{1}{2}} x$).
e) Şi în acest caz g este strict descrescătoare fiind compunerea dintre o funcţie strict descrescătoare (funcţia de gradul întâi $x \to 1 - 3x$) şi o funcţie strict crescătoare (funcţia logaritmică $x \to \log_2 x$).

2. Precizaţi între ce întregi se află numerele:
a) $\log_2 13$; b) $\log_{\frac{1}{3}} 10$; c) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{12}$; d) $\lg 1330$; e) $\ln \pi$.
R. Ideea este de a încadra argumentul logaritmului între două puteri consecutive ale bazei logaritmului.
Avem: a) $2^3 < 13 < 2^4$. Ţinând seama de monotonia funcţiei $g(x) = \log_2 x$ (strict crescătoare), din inegalităţile de mai sus rezultă $3 < \log_2 13 < 4$.
b) $(\frac{1}{3})^{-2} < 10 < (\frac{1}{3})^{-3}$. Utilizăm monotonia funcţiei $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ şi din aceste inegalităţi rezultă $-2 > \log_{\frac{1}{3}} 10 > -3$.
c) Din $(\frac{1}{5})^2 < \frac{1}{12} < (\frac{1}{5})^1$ şi monotonia funcţiei $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ rezultă $2 > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{12} > 1$.

d) Din $10^3 < 1330 < 10^4$ și monotonia funcției $g(x) = \lg x$ rezultă $3 < \lg 1330 < 4$.

e) $e < \pi < e^2$. Funcția logaritmică $g(x) = \ln x$ fiind strict crescătoare deducem $\ln e < \ln \pi < \ln e^2 \Leftrightarrow 1 < \ln \pi < 2$.

3. Comparați perechile de numere:

a) $\log_3 5$ și $\log_3 7$; b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3}$ și $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$; c) $\log_5 3$ și $\log_4 3$;

d) $\log_3 4$ și $\log_4 3$.

R. a) Din $5 < 7$ și faptul că funcția logaritmică $g(x) = \log_3 x$ este strict crescătoare rezultă $\log_3 5 < \log_3 7$.

b) Avem: $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ și $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ este o funcție strict descrescătoare. Prin urmare $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$.

c) Observăm că cei doi logaritmi au același argument 3. Se aduc logaritmii în baza 3 și obținem numerele: $\frac{1}{\log_3 5}$ și $\frac{1}{\log_3 4}$.

Din $4 < 5$ rezultă $\log_3 4 < \log_3 5$ și $\frac{1}{\log_3 4} > \frac{1}{\log_3 5}$.

d) A compara două numere între ele este echivalent cu a compara diferența lor cu zero. Deci $\log_3 4 - \log_4 3 = \log_3 4 - \frac{1}{\log_3 4} = \frac{(\log_3 4)^2 - 1}{\log_3 4}$.

Din $3 < 4$ rezulta $1 < \log_3 4$, ceea ce arată că $\log_3 4 - \log_4 3 > 0$, adică $\log_3 4 > \log_4 3$.

4. Comparați numerele m și n în cazurile:

a) $\log_3 m < \log_3 n$; b) $\log_{\frac{1}{3}} m < \log_{\frac{1}{3}} n$.

R. Inegalitățile între valorile funcției logaritmice implică monotonia acestei funcții.

a) Cum baza funcției logaritmice este supraunitară $3 > 1$, această funcție este strict crescătoare și deci relația de ordine între valorile funcției se păstrează și între argumente, adică $m < n$.

b) Baza funcției logaritmice fiind subunitară $0 < \frac{1}{3} < 1$, această funcție este strict descrescătoare și deci relația de ordine dintre argumentele funcției va fi contrară celei dintre valorile funcției, adică $m > n$.

5. Care din numerele de mai jos este pozitiv și care negativ ?

a) $\lg 4,5$; b) $\lg 0,45$; c) $\log_{\frac{1}{3}} 9,5$; d) $\log_{\frac{1}{3}} 0,9$; e) $\log_2 5 - 1$;

f) $\log_{\frac{1}{3}} 2 - 1$.

R. A compara $\log_a x$ cu zero revine la a-l compara cu $\log_a 1 = 0$.

Deci: a) $\lg 4,5 > \lg 1 = 0$ deoarece $4,5 > 1$, iar funcția $f(x) = \lg x$ are baza supraunitară și deci este strict crescătoare.

b) $\lg 0,45 < \lg 1 = 0$ pentru că $0,45 < 1$ și $f(x) = \lg x$ este strict crescătoare.

c) $\log_{\frac{1}{3}} 9,5 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ pentru că $9,5 > 1$, iar $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ este strict descrescătoare.

d) $\log_{\frac{1}{3}} 0,9 > \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ deoarece $0,9 < 1$, iar $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ este strict descrescătoare.

e) Se scrie numărul sub formă de logaritm astfel $\log_2 5 - 1 = \log_2 5 - \log_2 2 = \log_2 \frac{5}{2}$. Acum $\log_2 \frac{5}{2} > \log_2 1 = 0$.

f) Numărul este egal cu $\log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{3}} 6$ pentru care $\log_{\frac{1}{3}} 6 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$.

6. Pentru ce valori ale lui x următoarele inegalități sunt corecte ?

a) $\log_x 3 < \log_x 5$; b) $\log_x \frac{1}{2} > \log_x \frac{3}{4}$.

R. Din nou având inegalități între logaritmi înseamnă că pentru rezolvarea lor utilizăm monotonia funcției logaritmice.

a) Cum $3 < 5$ și $\log_x 3 < \log_x 5$ (deci relația de ordine dintre argumente se păstrează și între valorile funcției) înseamnă că funcția logaritmică trebuie să aibă baza supraunitară. Deci $x > 1$.

b) În acest caz din $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ rezultă $\log_x \frac{1}{2} > \log_x \frac{3}{4}$. Observăm că relația de ordine dintre valorile funcției este contrară celei dintre argumente, ceea ce înseamnă că funcția logaritmică este strict descrescătoare. Deci baza funcției este subunitară, adică $0 < x < 1$.

7. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_2 3$; b) $\log_n (n+1) > \log_{n+1} (n+2)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ și apoi arătați că $\log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 9 < 3 \log_6 7$;

c) $\log_{a+1} b < \log_a b < \log_a (b+1)$, dacă $a, b > 1$;

d) $\log_a (bc) + \log_b (ac) + \log_c (ab) \geq 6$, dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ sau $a, b, c \in (0, 1)$.

R. a) Scriem că $\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}}$ și ținând seama că funcția logaritmică cu baza supraunitară este strict crescătoare, dubla inegalitate cu logaritmi este echivalentă cu inegalitățile: $4 < 3^{\frac{3}{2}}$ și $2^{\frac{3}{2}} < 3$ sau echivalent $16 < 27$, $8 < 9$, evident.

b) Trecem logaritmul din membrul stâng în baza $n+1$ și inegalitatea se rescrie: $\frac{1}{\log_{n+1} n} > \log_{n+1} (n+2) \Leftrightarrow 1 > \log_{n+1} (n+2) \cdot \log_{n+1} n$.

Cum cei doi logaritmi din membrul drept sunt pozitivi, aplicăm inegalitatea mediilor și avem

$$\log_{n+1} (n+2) \log_{n+1} n < \left(\frac{\log_{n+1} (n+2) + \log_{n+1} n}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\log_{n+1} n(n+2)}{2} \right)^2 < \left(\frac{\log_{n+1} (n+1)^2}{2} \right)^2 = 1.$$

pentru $\log_7 8$ și $\log_8 9$ aplicăm inegalitatea demonstrată și avem:

$\log_7 8 < \log_6 7$. $\log_8 9 < \log_7 8 < \log_6 7$.

Prin urmare membrul stâng se majorează cu $3\log_6 7$.

c) A doua inegalitate este evidentă ţinând seama de monotonia funcţiei logaritmice cu bază supraunitară. Pentru a demonstra prima inegalitate, se aduce logaritmul din stânga în baza a şi inegalitatea devine: $\frac{\log_a b}{\log_a(a+1)} < \log_a b \Leftrightarrow 1 < \log_a(a+1)$, evident $(a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0)$.

d) Inegalitatea se mai scrie $(\log(xy) = \log x + \log y)$:

$(\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) + (\log_b c + \log_c b) \geq 6$,

adevărată deoarece fiecare paranteză este mai mare sau egală cu 2, pentru că $x + \frac{1}{x} \geq 2$, $(\forall)\, x > 0$, cu egalitate dacă $x = 1$.
Avem egalitate în inegalitate dacă $a = b = c$.

8. Stabiliţi monotonia funcţiei $g : D_g \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $g(x) = \log_2 x + \log_3 x$; **b)** $g(x) = \log_5(3x + 1)$;
c) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2^x + x)$.

R. a) Funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este suma a două funcţii logaritmice $x \to \log_2 x$, $x \to \log_3 x$, cu baze supraunitare, deci strict crescătoare. Atunci şi g are aceeaşi monotonie.

b) Funcţia $g : (-\frac{1}{3}, \infty) \to \mathbb{R}$ este compunerea a două funcţii strict crescătoare $x \to 3x+1$, $x \to \log_5 x$. Prin urmare g este strict crescătoare.

c) În acest caz $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este compunerea a două funcţii de monotonii diferite: $x \to 2^x + x$ (strict crescătoare ca sumă de două funcţii strict crescătoare) şi $x \to \log_{\frac{1}{3}} x$ (strict descrescătoare).
Deci g este strict descrescătoare.

9. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $10^{f(x)} \leq x < 10^{f(x)+1}$, $\forall x > 0$.
Să se calculeze $f(2001)$.
R. Din enunţ, logaritmând relaţia dată, rezultă $f(x) \leq \lg x < f(x) + 1$, ceea ce arată că $f(x) = [\lg x]$. Cum $10^3 \leq 2001 < 10^4$ rezultă $f(2001) = 3$.

10. Să se calculeze partea întreagă a numărului $3\log_2 5$.
R. Scriem numărul sub forma $\log_2 125$ şi încadrăm argumentul între două puteri consecutive ale bazei. Avem $2^6 < 125 < 2^7$. De aici $6 < \log_2 125 < 7$ şi deci $[\log_2 125] = 6$.

Probleme propuse

1. Precizaţi monotonia funcţiilor de mai jos:
1) $g(x) = \log_5 x$; 2) $g(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$; 3) $g(x) = \log_5(x - 3)$;
4) $g(x) = \log_7(1 - 2x)$; 5) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2 - 3x)$; 6) $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1)$.

2. Precizaţi între ce întregi se află numerele:
1) $\log_3 41$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 26$; 3) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{2}$; 4) $\lg 3333$; 5) $\ln \frac{1}{10}$.

3. Comparaţi perechile de numere (a, b) unde
1) $a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$; 2) $a = \lg 11$, $b = \lg 101$;
3) $a = \log_7 8$, $b = \log_5 8$; 4) $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$;
5) $a = \log_{\frac{1}{2}} 9$, $b = \log_{\frac{1}{3}} 9$; 6) $a = \log_x 5$, $b = \log_5 x$;
7) $a = \log_x y$, $b = \log_y x$; 8) $a = \log_x y$, $b = \log_{x+1} y$;
9) $a = \log_{x+1}(y + 1)$, $b = \log_x(y + 1)$, $x, y > 1$;
10) $a = y^{\sqrt{\log_y x}}$, $b = x^{\sqrt[n]{\log_x^{n-1} y}}$.

4. Comparaţi numerele m şi n în cazurile:
1) $\log_5 m > \log_5 n$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} m > \log_{\frac{1}{5}} n$; 3) $\log_4 m < \log_4 n$.

5. Care din numerele de mai jos este pozitiv şi care negativ ?
1) $\ln 2,9$; 2) $\ln 0,6$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$; 4) $-\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2})$; 5) $1 - \log_{\frac{1}{5}} 3$;
6) $\log_2 \frac{4}{5} - \log_2 \frac{5}{6}$.

6. Pentru ce valori ale lui x următoarele inegalităţi sunt corecte ?
1) $\log_x 3 > \log_x 2$; 2) $\log_x \frac{1}{2} > \log_x \frac{3}{5}$; 3) $\log_3 x > 1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$.

7. Să se demonstreze inegalităţile:
1) $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$, $\frac{4}{3} < \log_3 5 < \frac{3}{2}$, $\frac{5}{4} < \log_5 8 < \frac{3}{2}$ şi arătaţi că $[\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8] = 4$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a unui număr real a;
2) $6\lg^2 6 > 25\lg 2 \cdot \lg 3$; 3) $\log_a(bc)\log_b(ac)\log_c(ab) \geq 8$, $a, b, c > 1$ sau $a, b, c \in (0, 1)$;
4) $\log_{ab} c + \log_{ac} b + \log_{bc} a \geq \frac{3}{2}$, dacă $a, b, c > 1$ sau $a, b, c \in (0, 1)$;
5) $x^x \cdot y^y \geq x^y \cdot y^x$, $(\forall)\, x, y > 0$, $x, y \neq 1$.

8. Să se găsească cea mai mare valoare a produsului ab, ştiind că $\log_{\frac{1}{2}} a \cdot \log_{\frac{1}{2}} b = 1$, $a, b \in (0, 1)$.

9. 1) Să se arate că dacă $a, b, c > 1$, $abc = 1000$, atunci:
$\sqrt{3\lg a + 1} + \sqrt{3\lg b + 1} + \sqrt{3\lg c + 1} < \frac{15}{2}$

2° Dacă $x > y > z > 1$, $r > 0$ şi $a > 1$, atunci $(\frac{xz}{y})^{\log_z a} > a^{\log_{y+r}(x+r)}$.

3° Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci:
1°) $\sqrt{\log_a b} \leq \log_a \sqrt{ab}$; 2°) $ab \leq a^{\sqrt{\log_a b}} \cdot b^{\sqrt{\log_b a}}$.

4) Dacă $a, b, c > 1$, astfel încât $\frac{a}{b} > \frac{c}{a}$, atunci $\frac{\lg a}{\lg b} > \frac{\lg c}{\lg a}$.

5) Dacă $a, b \in (0, 1)$, atunci $\log_a(\frac{2ab}{a+b}) + \log_b(\frac{2ab}{a+b}) \geq 2$.

6) Dacă $x, y > 1$, atunci $\ln x \cdot \ln y < \ln^2(x + y)$.

10. Stabiliţi monotonia funcţiei $g : D_g \to \mathbb{R}$ în cazurile:

1) $g(x) = \log_3 x + \log_5 x$; 2) $g(x) = \lg(2x-6)$; 3) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$;
4) $g(x) = -\log_3(x+2)$; 5) $g(x) = \log_5(1-3x)$;
6) $g(x) = \log_2(\log_{\frac{1}{3}} x)$.

7. Funcţia logaritmică este concavă dacă $a > 1$ şi convexă dacă $0 < a < 1$.

Demonstraţie. Am văzut că funcţia exponenţială este convexă. Pe de altă parte am demonstrat la funcţii convexe (concave) că dacă f este strict crescătoare şi convexă, atunci inversa f^{-1} este strict crescătoare şi concavă. Dacă f este strict descrescătoare şi convexă, atunci f^{-1} este strict descrescătoare şi convexă (vezi probleme rezolvate la funcţii convexe - 1°. d). Ţinând seamă de acestea rezultă că funcţia logaritmică este concavă. ■

Observaţie. Condiţia de concavitate este echivalentă aici cu inegalitatea lui Jensen
$g(\frac{x_1+x_2}{2}) \geq \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$, $(\forall)\, x_1, x_2 > 0$, $a > 1$
ceea ce este echivalent cu
$\log_a \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a x_1 + \log_a x_2) \Leftrightarrow \log_a \frac{x_1+x_2}{2} \geq \log_a \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$,
adevărat deoarece este cunoscuta inegalitate a mediilor.
Transcrieţi condiţia de convexitate ($0 < a < 1$).

Problemă rezolvată

Să se arate că dacă $a, b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$, atunci
$a \ln a + b \ln b \leq -(a+b)\ln(a+b)$.

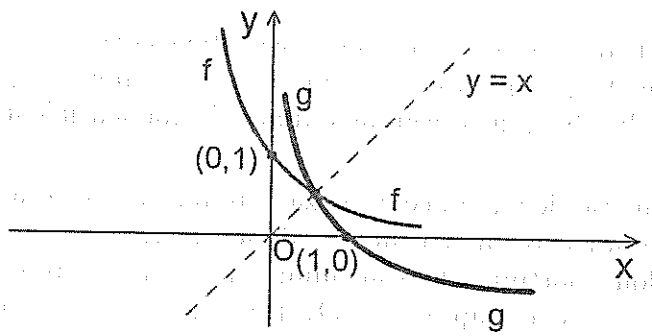
R. Se aduce inegalitatea la forma $\frac{a}{a+b}\ln a + \frac{b}{a+b}\ln b \leq -\ln(a+b)$ şi se aplică inegalitatea lui Jensen funcţiei concave $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
Avem $f(\frac{a}{a+b}\cdot a + \frac{b}{a+b}\cdot b) \geq \frac{a}{a+b}f(a) + \frac{b}{a+b}f(b)$, adică inegalitatea propusă.

Graficul funcţiei logaritmice

Fie funcţia logaritmică $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Vom trasa graficul acestei funcţii în două cazuri:
1) $a \in (0, 1)$; 2) $a > 1$.
Se poate proceda ca şi în cazul funcţiei exponenţiale, să trasăm graficul funcţiei logaritmice utilizând tabelul de valori ale funcţiei.
Lăsăm acest procedeu în seama cititorului.

Pentru trasarea graficului noi vom folosi faptul că funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale şi deci cele două grafice sunt simetrice în raport cu prima bisectoare ($y = x$). În plus vom ţine seama de proprietatea funcţiei logaritmice de a fi convexă ($0 < a < 1$) şi respectiv concavă ($a > 1$).

1) Graficul funcţiei logaritmice $g(x) = \log_a x$ cu bază subunitară $0 < a < 1$.
În acelaşi reper cartezian prezentăm graficul funcţiei exponenţiale $f(x) = a^x$ şi graficul funcţiei logaritmice $g(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$.



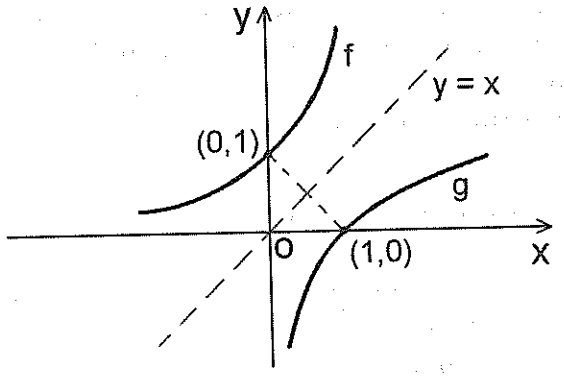
Concluzii. 1) Graficul funcţiei logaritmice intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(1, 0)$, care este simetricul, în raport cu prima bisectoare, punctului $(0, 1)$ în care graficul funcţiei exponenţiale intersectează axa Oy.

2) Graficul funcţiei logaritmice cu bază subunitară este format dintr-o singură ramură care coboară convex. Punctul $(1, 0)$ de pe grafic delimitează pe acesta două porţiuni: una situată deasupra axei Ox (dacă $0 < x < 1$) şi alta sub axa Ox (dacă $x > 1$). Aceasta se traduce prin:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow g(x) > 0 \\ x = 1 &\Rightarrow g(x) = 0 \\ x > 1 &\Rightarrow g(x) < 0 \end{aligned}$$

3) Graficul funcţiei logaritmice cu bază subunitară este din ce în ce mai apropiat de axele de coordonate, cu cât baza este mai mică.

2) Graficul funcţiei logaritmice $g(x) = \log_a x$ cu baza supraunitară $a > 1$.
În acelaşi reper cartezian sunt redate mai jos graficele funcţiilor $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, $a > 1$.



Concluzii. 1) Graficul funcţiei logaritmice intersectează axa Ox în punctul de coordonate $(1,0)$, care este simetricul, în raport cu prima bisectoare a punctului $(0,1)$ în care graficul funcţiei exponenţiale intersectează axa Oy.

2) Graficul funcţiei logaritmice cu bază supraunitară este format dintr-o singură ramură care urcă concav. Punctul $(1,0)$ de pe grafic pune în evidenţă două porţiuni ale graficului: una situată sub axa Ox (dacă $0 < x < 1$) şi alta deasupra axei Ox (dacă $x > 1$). Această situaţie grafică se traduce prin:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow g(x) < 0 \\ x = 1 &\Rightarrow g(x) = 0 \\ x > 1 &\Rightarrow g(x) > 0 \end{aligned}$$

Probleme rezolvate

1. Utilizând graficul funcţiei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x$, trasat, graficele următoarelor funcţii:

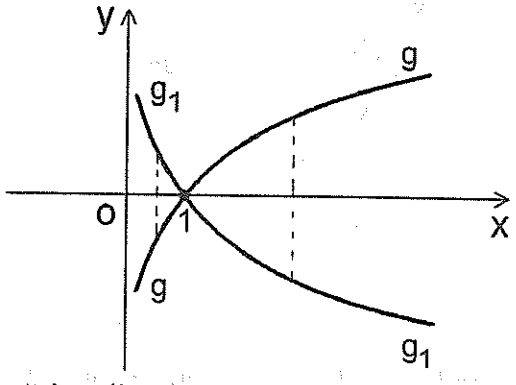
a) $g_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = -\log_2 x$;

b) $g_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = \log_2 x - 1$;

c) $g_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = |\log_2 x|$;

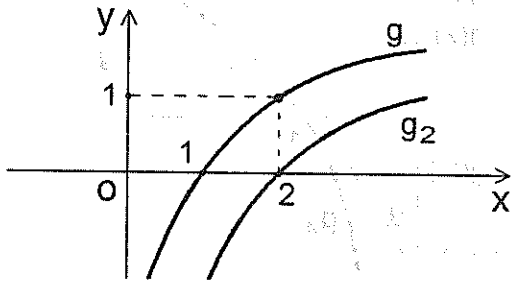
d) $g_4 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = 2\log_2 x$.

R. a) Cum $g_1(x) = -g(x)$, $x > 0$, graficul funcţiei g_1 este simetricul graficului funcţiei g în raport cu axa Ox.



De fapt se constată imediat (formula de schimbare a bazei) că $g_1(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

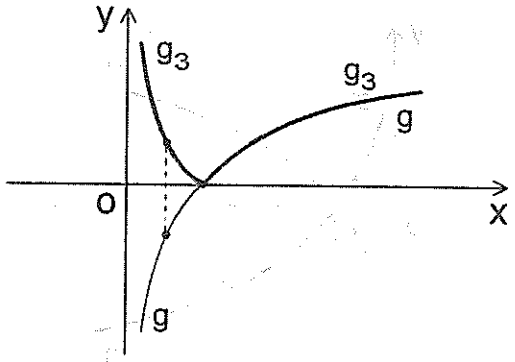
b) Pentru $x > 0$ fixat observăm că valoarea funcţiei g_2 în x este egală cu $g_2(x) = g(x) - 1$.



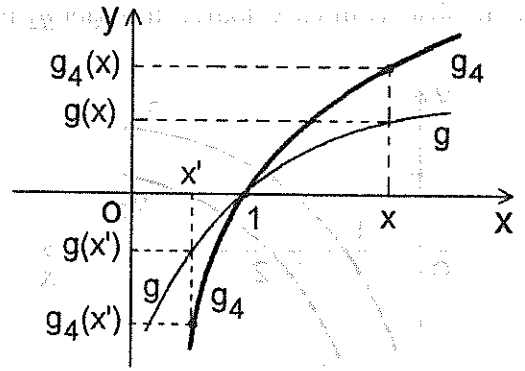
Aceasta arată că graficul funcţiei g_2 se obţine din graficul lui g printr-o translatare cu o unitate în jos de-a lungul axei Oy.

c) Funcţia g_3 ia numai valori pozitive (deoarece modulul oricărui număr real este pozitiv) ceea ce înseamnă că graficul său este situat deasupra axei Ox.

Pentru $x > 1$, graficul lui g_3 coincide cu al lui g, iar pentru $0 < x < 1$, graficul lui g este situat sub axa Ox. Cum aici $g_3(x) = -g(x)$ înseamnă că pe porţiunea $0 < x < 1$ graficul lui g_3 se obţine din graficul lui g prin simetrie în raport cu Ox.



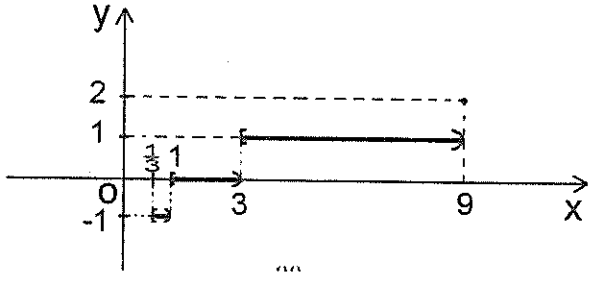
d) pentru $x > 0$, $g_4(x) = 2g(x)$, ceea ce arată că într-un punct x valoarea funcţiei g_4 este dublul valorii lui g în acest punct.
Graficul este redat mai jos:



2. Trasaţi graficul funcţiei g în cazurile:
a) $g : [\frac{1}{3}, 9] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [\log_3 x]$, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a;
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_3(x+2)$.
R. a) Cum baza logaritmului este 3, vom poziţiona argumentul x faţă de puteri consecutive ale lui 3 şi vom face explicitarea funcţiei

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [\frac{1}{3}, 1) \quad (3^{-1} \le x < 3^0 = 1) \\ 0, & x \in [1, 3) \quad (3^0 = 1 \le x < 3^1) \\ 1, & x \in [3, 9) \quad (3^1 \le x < 3^2) \\ 2, & x = 9. \end{cases}$$

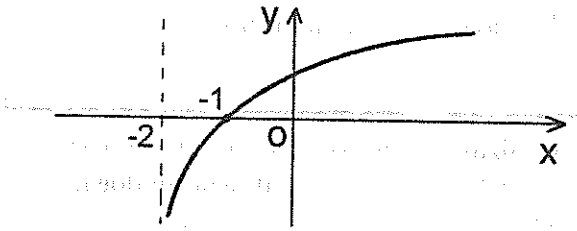
Acum graficul funcţiei se trasează uşor.



b) Domeniul funcţiei g este dat de $x + 2 > 0$, adică $x > -2$.
Funcţia g este strict crescătoare (compunere a două funcţii strict crescătoare). Determinăm punctul de intersecţie a graficului cu axa Ox. Am văzut că logaritmul lui 1 în orice bază este zero. Deci trebuie ca $x + 2 = 1$, ceea ce dă $x = -1$. Aşadar punctul $(-1, 0)$ este situat pe axa Ox şi reprezintă punctul de intersecţie a graficului cu Ox. Pentru o redare cât mai bună a graficului se face tabelul de valori.

x	-2		-1		1		7		∞
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	∞

Forma graficului este dată mai jos



Probleme propuse

1. Utilizând graficul funcţiei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, trasaţi graficele următoarelor funcţii:
1) $g_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$;
2) $g_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;
3) $g_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|$;
4) $g_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_4(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$;
5) $g_5 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_5(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x$;
6) $g_6 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_6(x) = |\log_{\frac{1}{2}} |x||$.

2. Stabiliţi domeniul D_g al funcţiei $g : D_g \to \mathbb{R}$ şi trasaţi graficul funcţiei în cazurile:
1) $g(x) = \log_3(x+1)$; 2) $g(x) = \log_5 |x-1|$; 3) $g(x) = |\log_2(x+1)|$.

3. Trasaţi graficul funcţiei g în cazurile:
1) $g : [1, 8] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [\log_2 x]$;
2) $g : [\frac{1}{4}, 16] \to \mathbb{R}$, $g(x) = [\log_{\frac{1}{2}} x]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

4. 1) Cum sunt situate graficele funcţiilor g_1, g_2 unul faţă de celălalt în cazurile:
a) $g_1(x) = \log_2 x$, $g_2(x) = \log_3 x$; b) $g_1(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $g_2(x) = \log_{0,1} x$?
2) Comparaţi perechile de numere:
a) $(\log_2 5, \log_3 5)$; b) $(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}, \log_{0,1} \frac{1}{3})$.

Semnul funcţiei logaritmice

Cunoaşterea semnului funcţiei logaritmice este importantă în rezolvarea unor inegalităţi (inecuaţii) în stabilirea mulţimii de definiţie pentru funcţii.
Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.
Are loc următoarea

Teoremă. Dacă:

$0<a<1$, atunci $\begin{cases}\log_a x>0 \text{ pentru } 0<x<1\\ \log_a x<0 \text{ pentru } x>1\end{cases}$

$a>1$, atunci $\begin{cases}\log_a x>0 \text{ pentru } x>1\\ \log_a x<0 \text{ pentru } 0<x<1.\end{cases}$

$\log_a 1=0$

Demonstraţie. Utilizăm monotonia funcţiei logaritmice. Vom aborda doar cazul $0<a<1$ (dacă $a>1$ se tratează analog).
Avem echivalenţele:
$\log_a x>0=\log_a 1\Leftrightarrow 0<x<1$
$\log_a x<0=\log_a 1\Leftrightarrow x>1$. ■

Probleme rezolvate

1. Să se determine domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor $g:D_g\to\mathbb{R}$ în cazurile: **a)** $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{7}}x)$;
b) $g(x)=\log_2(\log_4 x)$; **c)** $g(x)=\sqrt{\log_5(x+3)}$;

R. a) Funcţia g există dacă:
- $x>0$ (pentru existenţa logaritmului $\log_{\frac{1}{7}}x$)
- $\log_{\frac{1}{7}}x>0$ (pentru existenţa logaritmului $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{7}}x)$).

Deci domeniul lui g se determină rezolvând sistemul:

$$\begin{cases}x>0\\ \log_{\frac{1}{7}}x>0=\log_{\frac{1}{7}}1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<1.\end{cases}\quad\text{Deci } x\in(0,1).$$

b) În acest caz g există dacă au sens cei doi logaritmi în acelaşi timp, adică:

$$\begin{cases}x>0\\ \log_4 x>0=\log_4 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1.\end{cases}\quad\text{De aici } x>1.$$

c) Pentru existenţa funcţiei g se impun condiţiile:

$$\begin{cases}x+3>0 & \text{(existenţa logaritmului)}\\ \log_5(x+3)\geq 0 & \text{(existenţa radicalului de ordin par).}\end{cases}$$

Sistemul se scrie echivalent:

$$\begin{cases}x>-3\\ \log_5(x+3)\geq\log_5 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\ x+3\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\ x\geq -2.\end{cases}$$

Deci $D_g=[-2,\infty)$.

2. Stabiliţi semnul funcţiei $g:D_g\to\mathbb{R}$ în cazurile:
a) $g(x)=\log_{\frac{1}{7}}(x-1)$; **b)** $g(x)=\log_3 x+1$; **c)** $g(x)=\frac{\lg(x-1)}{1-\lg x}$.

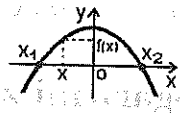
R. a) A stabili semnul lui $g(x)$ revine la a-l compara cu zero.
Mai întâi g este definită dacă $x-1>0$, adică $x>1$.
Acum determinăm valorile lui x din domeniu pentru care
$g(x)=0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{7}}(x-1)=0=\log_{\frac{1}{7}}1\Leftrightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$.
Deci $g(x)<0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{7}}(x-1)<\log_{\frac{1}{7}}1\Leftrightarrow x-1>1\Leftrightarrow x>2$.
Analog $g(x)>0$ dacă $1<x<2$.
Tabelul de semn al funcţiei este:

x	1		2		∞
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Să observăm că singurul punct în care g se anulează este $x=2$ şi că pe un interval pe care g nu se anulează păstrează un anume semn.
Dacă $x\in(1,2)$, atunci $g(x)>0$, iar dacă $x>2$ avem $g(x)<0$.

Procedeu practic pentru a studia semnul unei funcţii $g:D_g\to\mathbb{R}$.

1) Se rezolvă ecuaţia $g(x)=0$ pe mulţimea D_g;
2) Dacă $x_1,x_2\in D_g$, $x_1<x_2$ sunt două rădăcini consecutive ale ecuaţiei $g(x)=0$, atunci pe intervalul (x_1,x_2) funcţia g are acelaşi semn. Pentru a-l preciza se calculează $g(x_0)$, cu $x_0\in(x_1,x_2)$ ales convenabil astfel încât $g(x_0)$ să fie uşor de calculat.
Analog se procedează pe orice alt interval din D_g.



b) Funcţia g există dacă $x>0$. Ecuaţia $g(x)=0\Leftrightarrow\log_3 x+1=0\Leftrightarrow\log_3 x=-1=\log_3 3^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.
Valoarea $x=\frac{1}{3}$ împarte domeniul de definiţie a funcţiei în două intervale $(0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},\infty)$. Pentru $x=\frac{1}{9}\in(0,\frac{1}{3})$ avem $g(\frac{1}{9})=\log_3 3^{-2}+1=-2+1=-1<0$. Deci pe intervalul $(0,\frac{1}{3})$ funcţia g este negativă. Din $g(3)=\log_3 3+1=1+1=2>0$ deducem că $g(x)>0$ dacă $x\in(\frac{1}{3},\infty)$.
Tabelul de semn pentru funcţie este:

x	0		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	

c) Funcția g există dacă:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x>0 \\ 1-\lg x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \lg x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>1,\ x\neq 10.$$

Se realizează tabelul de semn al lui g studiind semnul numărătorului, numitorului și apoi semnul lui g.

x	1		2		10		∞
$\lg(x-1)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-\lg x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	

Deci $g(x)<0$, dacă $x\in(1,2)\cup(10,\infty)$ și $g(x)>0$, dacă $x\in(2,10)$.

Probleme propuse

1. Să se determine domeniile maxime de definiție ale funcțiilor $g: D_g\to\mathbb{R}$ în cazurile:

1) $g(x)=\log_2(\log_3 x)$; 2) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x)$; 3) $g(x)=\log_5(3x+2)$;

4) $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(\log_9(2x+4))$; 5) $g(x)=\lg\sqrt{x^2-1}$;

6) $g(x)=\sqrt{\ln(3x-2e)}$; 7) $g(x)=\log_7\frac{x}{x+1}$; 8) $g(x)=\log_2\log_5\frac{x}{x-1}$;

9) $g(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{7}}(\log_2 x)}$; 10) $g(x)=\sqrt{\log_3(\log_{\frac{1}{7}} x)}$.

2. Stabiliți semnul funcției $g: D_g\to\mathbb{R}$ în cazurile:

1) $g(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$; 2) $g(x)=\log_3 x+3$; 3) $g(x)=\lg|x-1|$;

4) $g(x)=\log_5(x^2-3x+3)$; 5) $g(x)=\lg\frac{x-1}{x+1}$;

6) $g(x)=\log_2\sqrt{x^2-4x+5}$.

Logaritmi zecimali

Au jucat de-a lungul timpului un rol important datorită proprietăților remarcabile pe care aceștia le au în calculul numeric.

Vom prezenta succint acele proprietăți care au o importanță practică.

Partea întreagă a logaritmului unui număr

Fie $x\geq 1$. Atunci există $n\in\mathbb{N}$ pentru care

$$10^n\leq x<10^{n+1}$$

(Orice număr supraunitar este cuprins între două puteri consecutive ale lui 10).

Într-adevăr prin logaritmarea în baza zece a dublei inegalități rezultă

$$\lg 10^n\leq\lg x<\lg 10^{n+1}\Leftrightarrow n\leq\lg x<n+1.$$

De aici $[\lg x]=n$, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a.

Deci avem echivalența:

$$n\in\mathbb{N},\ 10^n\leq x<10^{n+1}\Leftrightarrow[\lg x]=n$$

care se traduce prin:

> partea întreagă a logaritmului zecimal al unui număr superior lui 1 este egal cu numărul de cifre care preced virgula în scrierea zecimală a acestui număr, diminuat cu o unitate.

Analog se arată că dacă $x\in(0,1)$, atunci există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$10^{-n-1}\leq x<10^{-n}\Leftrightarrow[\lg x]=-n-1$$

care spune că:

> partea întreagă a logaritmului zecimal a unui număr cuprins între 0 și 1 este egal cu opusul numărului de zerouri (inclusiv zeroul plasat înaintea virgulei) care preced prima cifră nenulă în scrierea zecimală a acestui număr.

În mod tradițional numărul întreg $[\lg a]$, $a>0$, se numește **caracteristica** logaritmului său zecimal.

Exemple

1) Dacă $x=15$, atunci $10^1\leq x<10^2$, ceea ce dă $[\lg x]=1$.
2) Dacă $x=1999$, atunci $10^3\leq x<10^4$, adică $[\lg x]=3$.
3) Dacă $x=0,11$, atunci $10^{-1}=0,10\leq x<1=10^0$, adică $[\lg x]=-1$.
4) Dacă $x=0,00016$, atunci $10^{-4}\leq x<10^{-3}$, și deci $[\lg x]=-4$.

Partea zecimală a logaritmului unui număr

Fie $x>0$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Se numește **mantisa** logaritmului zecimal al lui x numărul notat $\{\lg x\}$ definit prin

$$\{\lg x\}=\lg x-[\lg x].$$

Dacă x se înmulțește cu o putere a lui 10, atunci se verifică ușor că mantisa logaritmului zecimal al acestui număr coincide cu mantisa logaritmului zecimal al lui x.

După cum se poate vedea partea dificilă în a calcula $\lg x=[\lg x]+\{\lg x\}$

este aceea a determinării mantisei $\{\lg x\}$. Aceasta o determinăm cu ajutorul tabelelor cu logaritmi.
Astăzi prezenţa pe piaţă a diverselor tipuri de minicalculatoare cu posibilitatea de a calcula $\lg x$, fac desuet calculul cu logaritmi zecimali utilizând tabelele de logaritmi. De aceea n-am insistat prea mult asupra acestor chestiuni.

Dobândă compusă

Noţiunile de exponenţială şi logaritm îşi găsesc aplicaţii practice în probleme de "aritmetică comercială". Vom prezenta în continuare câteva aplicaţii. Reamintim că un capital este plasat cu **dobândă compusă** dacă la sfârşitul unei perioade determinate (în general un an) dobânda se adaugă capitalului pentru a produce o nouă dobândă în perioadele următoare.

Valoarea atinsă de un capital

Să considerăm un **capital iniţial** C_0 (unităţi monetare - u.m. - pot fi lei, sute de mii de lei, milioane, dolari, mărci, etc.) pus într-o bancă (sau la CEC) cu o dobândă anuală de $t\%$. Vom calcula valoarea obţinută C_n din capitalul iniţial după o perioadă de n ani. Vom nota cu d dobânda obţinută de 1 u.m. după un an. Aceasta are valoarea $d = \frac{t}{100}$.
- Capitalul din bancă după un an este:
$C_1 = C_0 + C_0 d = C_0(1 + d)$.
- Capitalul din bancă după doi ani este:
$C_2 = C_1 + C_1 d = C_1(1 + d) = C_0(1 + d)^2$.
- Capitalul din bancă după trei ani este:
$C_3 = C_2 + C_2 d = C_2(1 + d) = C_0(1 + d)^3$.
Din aproape în aproape găsim că după n ani capitalul din bancă este:
$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} d = C_0(1 + d)^n$.
Aşadar am obţinut formula pentru C_n :

$$\boxed{C_n = C_0(1 + d)^n}$$

Exemple

1) Să se determine capitalul obţinut după 7 ani prin depunerea într-o bancă a sumei de 3000 u.m. cu o dobândă compusă de 4%.
R. Avem: $C_7 = 3000(1 + 0,04)^7 = 3947,80$ u.m.
2) Într-o bancă se depune o sumă cu o dobândă de 3%.
Care este timpul după care capitalul este dublul sumei depuse ?
R. Fie C_0 suma iniţială depusă şi C_n capitalul după n ani. Trebuie să avem relaţia $C_n = 2C_0 \Leftrightarrow C_0(1 + 0,03)^n = 2C_0$, iar de aici $(1,03)^n = 2$ sau încă prin logaritmare $n \lg 1,03 = \lg 2$.
De aici $n = \frac{\lg 2}{\lg 1.03} \approx 23,45$.
Deci durata după care se produce dublarea sumei iniţiale este cam 23,5 ani.

Constituirea unui capital

În vederea constituirii unui capital, se efectuează o dată pe an şi la dată fixă depunerea unei sume constante C_0 cu dobândă compusă. Să determinăm capitalul C obţinut la momentul ultimei depuneri, ştiind că s-au efectuat n depuneri şi că dobânda anuală este de $t\%$. Dobânda produsă de 1 u.m. în timp de 1 an este $d = \frac{t}{100}$.
Vom calcula valoarea obţinută de fiecare depunere cu ajutorul formulei din paragraful precedent.
- Prima depunere este realizată acum $(n - 1)$ ani şi atinge valoarea $C_0(1 + d)^{n-1}$;
- A doua depunere este realizată acum $(n - 2)$ ani şi a atins valoarea $C_0(1 + d)^{n-2}$;
.....
- Penultima depunere, adică a $(n - 1)$-a este făcută cu un an în urmă şi are valoarea $C_0(1 + d)$
- Ultima depunere, adică a n-a, nu aduce nici o dobândă şi îşi păstrează valoarea C_0.
Adunând cele n valori calculate mai sus, ne determină capitalul căutat:
$C = C_0(1 + d)^{n-1} + C_0(1 + d)^{n-2} + \cdots + C_0(1 + d) + C_0 =$
$= C_0[1 + (1 + d) + (1 + d)^2 + \cdots + (1 + d)^{n-1}] = C_0 \frac{1-(1+d)^n}{1-(1+d)}$.
Deci

$$\boxed{C = C_0 \frac{(1 + d)^n - 1}{d}}$$

(Am utilizat egalitatea $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$).

Exemple

1) Să se calculeze capitalul constituit prin 10 depuneri anuale a unei sume de 150 u.m. cu dobândă compusă dacă dobânda anuală este de 4%.
R. Avem: $C = 150 \frac{(1+0,04)^{10}-1}{0,04} = 1800,90$ u.m.
2) O persoană depune în fiecare an suma de 1000 u.m. cu dobândă compusă. Se ştie că dobânda anuală este de 5%. Să se determine numărul de depuneri efectuate dacă s-a obţinut un capital de 9549,10 u.m.

R. Din relaţia de mai sus rezultă $(1+d)^n = \frac{C_0 \cdot d}{C_0} + 1$, sau prin logaritmare

$n \lg(1+d) = \lg(\frac{C_0 \cdot d}{C_0} + 1)$, iar de aici $n = \frac{\lg(\frac{C_0 \cdot d}{C_0}+1)}{\lg(1+d)}$.

Se obţine pentru $C_0 = 1000$, $C = 9549,1$, $d = 0,05$, că $n = 8$ depuneri.

Amortizarea unei datorii

Pentru rambursarea unei datorii D contractată cu o dobândă de $t\%$, se efectuează în fiecare an şi la dată fixă depunerea unei sume constante S. Ne propunem să stabilim o relaţie între D, S, numărul n de ani necesari rambursării datoriei şi dobânda $d = \frac{t}{100}$ (prima sumă S este depusă după un an de la împrumut). Dacă nu efectuăm nici o rambursare anuală datoria D, după n ani, va deveni datoria $D' = D(1+d)^n$. Va trebui deci, rambursată suma D' o singură dată, n ani după ce s-a făcut împrumutul. Paralel, dacă se constituie un capital cu ajutorul a n depuneri (efectuate anual) de sumă S plasată cu dobândă compusă de $t\%$, vom dispune de suma $S' = S\frac{(1+d)^n-1}{d}$.

Pentru amortizarea datoriei D este suficient ca suma S anual depusă să fie astfel încit $D' = S'$, adică

$$D(1+d)^n = S\frac{(1+d)^n-1}{d}$$

Exemplu

Să se calculeze suma S ce se va depune anual într-o bancă pentru amortizarea unei datorii de 100.000 u.m., rambursabilă în 15 ani dacă dobânda de împrumut este de 6%.

R. Avem $D = 100.000$, $n = 15$, $d = 0,06$.

Utilizând formula de mai sus avem:

$S = \frac{dD(1+d)^n}{(1+d)^n-1} = \frac{0,06 \cdot 100000 \cdot (1,06)^{15}}{(1,06)^{15}-1} = 10.296,30$ u.m.

Probleme propuse

1. Să se calculeze valoarea obţinută de la un capital de 4000 u.m. depus cu dobândă compusă timp de 8 ani ştiind că dobânda este de 3,5%.

2. Un capital de 10.000 u.m. este plasat cu dobândă compusă timp de 7 ani. Dacă dobânda anuală este de 4%, atunci calculaţi valoarea atinsă de acest capital în fiecare an.

3. Un capital depus cu dobândă compusă timp de 12 ani atinge valoarea de 22.500 u.m. Dacă dobânda este de 4,5%, atunci determinaţi acest capital.

4. Un capital de 4500 u.m. este depus cu dobândă compusă şi atinge valoarea de 6350 u.m. Dacă dobânda anuală este de 3%, atunci determinaţi durata depunerii.

5. Un capital de 1300 u.m. depus cu dobândă compusă timp de 7 ani atinge valoarea 1955 u.m. Care este dobânda anuală ?

6. Calculaţi suma S necesară pentru amortizarea unei datorii de 120.000 u.m. rambursabilă în 25 ani, dacă dobânda la împrumut este de 5,5%.

7. Pentru a rambursa o datorie contractată cu o dobândă de 5%, cineva depune 8 sume $S = 1700$ u.m.. Care este valoarea acestei datorii ?

Ecuaţii şi inecuaţii exponenţiale

Ecuaţii exponenţiale

Prin **ecuaţie exponenţială** se înţelege o ecuaţie în care necunoscuta x figurează la exponenţi.

Se numeşte **soluţie** a unei ecuaţii exponenţiale de necunoscută x, un număr real x_0 cu proprietatea că punând $x = x_0$ în ecuaţie, aceasta se verifică.

A **rezolva** o ecuaţie exponenţială înseamnă a-i determina toate soluţiile.

Rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale se bazează pe proprietatea: două puteri de aceeaşi bază (pozitivă şi diferită de unu) egale, au exponenţi egali.

Două ecuaţii exponenţiale se numesc **echivalente** dacă mulţimile de soluţii coincid.

Vom ilustra ecuaţiile exponenţiale prin câteva tipuri, punând în evidenţă şi metoda de rezolvare. Pentru mai multe detalii recomandăm lucrarea subsemnatului "Ecuaţii şi inecuaţii: iraţionale, exponenţiale, logaritmice, algebrice de grad superior, trigonometrice", apărută la Editura Mathpress, 1998, unde este prezentată pe larg această problematică.

1. Ecuaţii exponenţiale de forma: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Metoda de rezolvare. Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = g(x)$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt şi soluţii ale ecuaţiei date.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $3^{2x+1} = 3^{-x^2}$; b) $3^{\frac{x}{2}}5^{\frac{x}{2}} = 225$; c) $2^{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{6}}} = 4^{\sqrt{x+1}}$.

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu ecuaţia $2x + 1 = -x^2$, şi are soluţia dublă $x = -1$.

b) Ecuaţia se scrie echivalent $15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

c) Necunoscuta figurează sub radical de ordin par deci se impune condiția $x+1 \geq 0$, adică $x \geq -1$.
Când avem puteri cu baze diferite se aduc acestea la aceeași bază (dacă acest lucru este posibil).
Aici avem bazele 2 și 4. Se scrie $4 = 2^2$.
Ecuatia se scrie echivalent pe $[-1, \infty)$
$2^{\sqrt{x+1}} \cdot 2^{\frac{\sqrt{6}}{2}} = 2^{2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{6}}{2}} = 2^{2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$
$\sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, cu soluția $x = \frac{1}{2} \in [-1, \infty)$.

2. Ecuații exponențiale de forma: $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Metodă de rezolvare. Dacă $b \leq 0$, ecuația nu are soluții (întotdeauna exponențiala ia numai valori strict pozitive).
Dacă $b > 0$, atunci se logaritmează ambii membri într-o bază convenabilă. Dacă se logaritmează în baza a ecuația se scrie echivalent $f(x) = \log_a b$ și se rezolvă această ecuație.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuațiile:
a) $3^{x-1} = 2$; b) $5^{-x^2} = -3$; c) $(3^x - 1)(3^x + 1) = 0$.
R. a) Se logaritmează ambii membri ai ecuației în baza trei și se obține ecuația echivalentă $x - 1 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = 1 + \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 6$.
b) Cum $-3 < 0$, ecuația dată nu are soluții.
c) Ecuația este echivalentă cu reuniunea ecuațiilor $3^x - 1 = 0$, $3^x + 1 = 0$.
Prima ecuație este echivalentă cu ecuația $3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$.
A doua ecuație $3^x = -1$ nu are soluții.
Deci ecuația dată are soluția $x = 0$.

3. Ecuații exponențiale de forma: $a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} = b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)}$, $a_i, b_i > 0$, $a_i, b_i \neq 1$.

Metodă de rezolvare. Se logaritmează ambii membri ai ecuației într-o bază convenabilă și apoi se rezolvă ecuația astfel obținută. Soluțiile acestei ecuații sunt și soluții ale ecuației date.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuațiile:
a) $2^{x+1} \cdot 3^{x-1} = 5$; b) $3^{x+1} = 5^{2x-1}$; c) $2^{2x} \cdot 3^{3x} = 5^{5x} \cdot 7^{7x}$.
R. a) Se logaritmează în baza zece și se obține ecuația echivalentă
$\lg(2^{x+1} \cdot 3^{x-1}) = \lg 5 \Leftrightarrow \lg 2^{x+1} + \lg 3^{x-1} = \lg 5 \Leftrightarrow$
$(x+1)\lg 2 + (x-1)\lg 3 = \lg 5 \Leftrightarrow$
$x(\lg 2 + \lg 3) = \lg 5 - \lg 2 + \lg 3 \Leftrightarrow x \lg 6 = \lg(\frac{15}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{\lg(\frac{15}{2})}{\lg 6}$.
b) Logaritmând în baza zece avem ecuațiile echivalente:
$\lg 3^{x+1} = \lg 5^{2x-1} \Leftrightarrow (x+1)\lg 3 = (2x-1)\lg 5 \Leftrightarrow$
$x(\lg 3 - 2\lg 5) = -\lg 5 - \lg 3 \Leftrightarrow x \lg(\frac{3}{25}) = \lg(\frac{1}{15}) \Leftrightarrow x = \frac{\lg(\frac{1}{15})}{\lg(\frac{3}{25})}$.
c) Aplicând același procedeu ca mai sus avem lanțul de echivalențe:
$2x\lg 2 + 3x\lg 3 = 5x\lg 5 + 7x\lg 7 \Leftrightarrow x(2\lg 2 + 3\lg 3 - 5\lg 5 - 7\lg 7) = 0$
Cum paranteza este diferită de zero rezultă $x = 0$.
Altfel. Ecuația se scrie $(\frac{4 \cdot 27}{5^5 \cdot 7^7})^x = 1$. De aici $x = 0$.

4. Ecuațiile exponențiale de forma: $c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Metodă de rezolvare. Ecuațiile de acest tip se rezolvă prin substituție. Se notează $a^{f(x)} = y > 0$ și se obține ecuația de gradul al doilea în y, $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$ cu soluțiile y_1, y_2. Ecuațiile $a^{f(x)} = y_i$, $i = 1, 2$ au soluții dacă $y_i > 0$.
În general ecuația de forma $f(a^x) = 0$ se rezolvă substituind $a^x = y > 0$ și apoi rezolvând ecuațiile exponențiale $a^x = y_i$, unde y_i sunt soluțiile ecuației $f(y) = 0$. În final reuniunea acestor soluții reprezintă mulțimea de soluții pentru ecuația dată.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuațiile exponențiale:
a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; b) $25^{-x} + 5^{-x+1} - 50 = 0$; c) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$.
R. a) Se aduce ecuația la forma echivalentă $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ și se notează $2^x = y > 0$. Ecuația devine $y^2 - 9y + 8 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = 8$.
Revenim la substituție și rezolvăm ecuațiile $2^x = 1$, $2^x = 8$. Prima ecuație are soluția $x = 0$, iar a doua ecuație are soluția $x = 3$. Deci soluțiile ecuației date sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.
b) Se scrie ecuația dată sub forma echivalentă $5^{-2x} + 5^{-x} \cdot 5 - 50 = 0$.
Punem $5^{-x} = y > 0$ și avem ecuația $y^2 + 5y - 50 = 0$ cu soluțiile $y_1 = -10$, $y_2 = 5$. Valoarea $y_1 = -10$ nu convine ($y > 0$). Ecuația $5^{-x} = 5$ are soluția $x = -1$. Deci ecuația dată are soluția $x = -1$.
c) Se impune condiția $x \geq 0$ și se notează $3^{2\sqrt{x}} = y > 0$. Ecuația devine: $y^2 - 4y + 3 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Revenim la substituție și rezolvăm ecuațiile $3^{2\sqrt{x}} = 1$ când găsim $x_1 = 0$ și $3^{2\sqrt{x}} = 3$ când obținem $2\sqrt{x} = 1$, adică $x_2 = \frac{1}{4}$.
Deci soluțiile ecuației date sunt $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

5. Ecuații exponențiale de forma: $c_1 a^{f(x)} + c_2 b^{f(x)} + c_3 = 0$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $a \cdot b = 1$.

Metodă de rezolvare. Este o ecuaţie exponenţială în care figurează bazele a, b cu proprietatea că produsul lor este unu, $ab = 1$. De aici $b = \frac{1}{a}$, iar ecuaţia se scrie echivalent

$$c_1 a^{f(x)} + \frac{c_2}{a^{f(x)}} + c_3 = 0.$$

Se notează $a^{f(x)} = y > 0$ şi se obţine ecuaţia de gradul doi în y, $c_1 y^2 + c_3 y + c_2 = 0$ cu soluţiile y_1, y_2. Se revine la substituţie şi se rezolvă ecuaţiile: $a^{f(x)} = y_i$, $i = 1, 2$. Reuniunea acestor soluţii este mulţimea de soluţii a ecuaţiei date.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 10$.

R. Să observăm că produsul bazelor celor două exponenţiale este egal cu unu. Într-adevăr $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}} = 1$. De aici $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$ şi ecuaţia se scrie echivalent $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + \frac{1}{(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x} = 10$.

Punem $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = y > 0$ şi se obţine ecuaţia $y^2 - 10y + 1 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = (5+2\sqrt{6})^{-1} > 0$, $y_2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

Revenim la substituţie şi avem de rezolvat ecuaţiile:

$(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = (5+2\sqrt{6})^{-1}$, $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x = 5 + 2\sqrt{6}$.

Prima ecuaţie are soluţia $x_1 = -2$, iar a doua ecuaţie are soluţia $x_2 = 2$.

6. Ecuaţii exponenţiale de forma:

$$c_1 a^{f_1(x)} + \cdots + c_k a^{f_k(x)} = d_1 \cdot b^{g_1(x)} + \cdots + d_l \cdot b^{g_l(x)},\ a, b > 0,\ a, b \neq 1.$$

Metodă de rezolvare. În ecuaţiile exponenţiale care conţin exponenţiale cu baza diferite $a \neq b$, este indicat să grupăm într-un membru termenii care conţin exponenţiale de aceeaşi bază a, iar în celălalt membru termenii care au în componenţa lor exponenţiale cu aceeaşi bază b. În fiecare membru se dă factor comun exponenţiala de exponent cel mai mic, ajungându-se la o ecuaţie exponenţială mai simplă de forma $a^{f(x)} = \alpha b^{g(x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt soluţiile ecuaţiei date.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$.

R. Ecuaţia se scrie echivalent:

$5^x + 5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 3^x + 3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 5^x(1+5+5^2) = 3^x(1+3+3^2) \Leftrightarrow 31 \cdot 5^x = 13 \cdot 3^x \Leftrightarrow (\frac{5}{3})^x = \frac{13}{31}$. De aici $x = \frac{\lg(\frac{13}{31})}{\lg(\frac{5}{3})}$.

7. Ecuaţii exponenţiale de forma:

$$c_1 a_1^{2f(x)} + c_2 \cdot a_2^{2f(x)} + c_3 (a_1 \cdot a_2)^{f(x)} = 0,\ a_i > 0,\ a_i \neq 1.$$

Metodă de rezolvare. O ecuaţie de acest tip o numim **omogenă**, deoarece fiecare termen al ecuaţiei în a_1 şi a_2, are exponentul acelaşi $2f(x)$. Pentru a rezolva astfel de ecuaţii se recomandă împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei prin $a_2^{2f(x)}$ când se obţine ecuaţia echivalentă $c_1(\frac{a_1}{a_2})^{2f(x)} + c_3(\frac{a_1}{a_2})^{f(x)} + c_2 = 0$, care este de tipul 4.

Se poate împărţi ecuaţia prin $(a_1 a_2)^{f(x)}$ când obţinem: $c_1(\frac{a_1}{a_2})^{f(x)} + c_2(\frac{a_2}{a_1})^{f(x)} + c_3 = 0$, care este o ecuaţie de tipul 5.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile exponenţiale:

a) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$; b) $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

R. a) Ecuaţia se scrie echivalent:

$3 \cdot 4^{2x} + 37 \cdot 6^{2x} = 26 \cdot 9^{2x} \Leftrightarrow 3(\frac{4}{9})^{2x} + 37(\frac{4}{9})^x - 26 = 0$,

ultima ecuaţie dedusă din precedenta prin împărţire cu 9^{2x}. Punem $(\frac{4}{9})^x = y > 0$ şi obţinem ecuaţia $3y^2 + 37y - 26 = 0$ cu soluţiile $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = -13$. Cum $y > 0$ se reţine valoarea $y_1 = \frac{2}{3}$. Se revine la substituţie şi se rezolvă ecuaţia $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^{2x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Deci soluţia ecuaţiei date este $x = \frac{1}{2}$.

b) Ecuaţia se scrie echivalent:

$3^{3x} + 2^{2x} \cdot 3^x = 2 \cdot 2^{3x} \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{3x} + (\frac{3}{2})^x - 2 = 0$.

Fie $(\frac{3}{2})^x = y > 0$ şi ecuaţia ultimă devine: $y^3 + y - 2 = 0$ cu soluţia reală $y = 1 > 0$. Deci $(\frac{3}{2})^x = 1 = (\frac{3}{2})^0$ când $x = 0$.

Ecuaţia dată are soluţia $x = 0$.

8. Ecuaţii care se rezolvă prin descompuneri în factori sau substituţii

Metoda de rezolvare. În general pentru rezolvarea ecuatiilor exponenţiale cu baze diferite, se recomandă, descompunerea bazelor în factori primi, observând astfel o anume posibilitate de a grupa termenii ecuaţiei în ideea de a scrie ecuaţia ca un produs de factori egal cu zero. Alteori este profitabil de a lucra cu cât mai puţine baze. În fine, în unele cazuri, se remarcă o anume expresie depinzând de necunoscuta care poate fi substituită şi se rescrie ecuaţia dată în funcţie de noua necunoscută. Aşa sunt ecuaţiile care au forma generală:

1) $A(a^{2x} + a^{-2x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

În acest caz se notează $a^x + a^{-x} = y$. Prin ridicare la pătrat rezultă

$a^{2x} + a^{-2x} = y^2 - 2$.
Atunci ecuaţia se scrie: $Ay^2 + By + C - 2A = 0$ cu soluţiile y_1, y_2.
Din $a^x + \frac{1}{a^x} \geq 2$ rezultă că $y \geq 2$ (deoarece $u + \frac{1}{u} \geq 2$ dacă $u > 0$).
Revenind la substituţie au soluţii ecuaţiile $a^x + \frac{1}{a^x} = y_i$ pentru care $y_i \geq 2$.
2) $A(a^{3x} + a^{-3x}) + B(a^x + a^{-x}) + c = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.
Şi în această situaţie punem $a^x + a^{-x} = y \geq 2$. De aici prin ridicare la cub rezultă $a^{3x} + a^{-3x} = y^3 - 3y$, etc.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile exponenţiale:
a) $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$; b) $9(9^x + 9^{-x}) - 3(3^x + 3^{-x}) - 72 = 0$.
R. a) Ecuaţia se scrie echivalent:
$5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 25^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 5(25^x - 6) - 6^x(25^x - 6) = 0 \Leftrightarrow (25^x - 6)(5 - 6^x) = 0$.
Ultimul produs este zero dacă cel puţin unul din factori este egal cu zero.
Deci $25^x - 6 = 0$ sau $6^x = 5$.
Prima ecuaţie are soluţia $x_1 = \log_{25} 6$, iar a doua ecuaţie dă soluţia $x_2 = \log_6 5$. Deci ecuaţia dată are soluţiile x_1, x_2.
b) Aducem exponenţialele la aceeaşi bază 3 şi ecuaţia se scrie echivalent:
$9(3^{2x} + 3^{-2x}) - 3(3^x + 3^{-x}) - 72 = 0$.
Notăm $3^x + 3^{-x} = y \geq 2$, iar de aici prin ridicare la pătrat obţinem $3^{2x} + 3^{-2x} = y^2 - 2$. Cu aceasta ecuaţia dată devine: $9(y^2 - 2) - 3y - 72 = 0$ cu soluţiile $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = -3$. Ţinând seama că $y \geq 2$, numai ecuaţia $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ are soluţii. Se notează $3^x = z > 0$ şi rezultă ecuaţia $3z^2 - 10z + 3 = 0$ cu soluţiile $z_1 = 3$, $z_2 = \frac{1}{3}$. Ecuaţiile $3^x = 3$, $3^x = 3^{-1}$ dau soluţiile $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.
Ecuaţia dată are soluţiile: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

9. Ecuaţii exponenţiale cu soluţie unică

Metodă de rezolvare. Rezolvarea cestor ecuaţii constă în a le aduce la forma $f(x) = c$, unde f este o funcţie strict monotonă, iar c este o constantă şi observând că ecuaţia are o soluţie x_0. Cum f este strict monotonă se deduce că f este injectivă şi deci ecuaţia dată are soluţia unică x_0.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:
a) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$; b) $4^x + 9 = 5^x$.
R. a) Să observăm că $x = 3$ verifică ecuaţia deoarece: $3^2 + 5^2 = 34$.
Funcţia $f(x) = 3^{x-1} + 5^{x-1}$ fiind suma a două funcţii exponenţiale cu baze supraunitare este strict crescătoare.
Deci $x = 3$ este singura soluţie a ecuaţiei.
b) În acest caz se împarte ecuaţia prin 5^x $(\neq 0)$ şi aceasta se scrie echivalent: $(\frac{4}{5})^x + 9(\frac{1}{5})^x = 1$.
Se vede că $x = 2$ este soluţie a ecuaţiei. Funcţie $f(x) = (\frac{4}{5})^x + 9(\frac{1}{5})^x$ este strict descrescătoare, fiind suma a două astfel de funcţii. Deci ecuaţia are soluţia unică $x = 2$.

10.* Ecuaţii exponenţiale de forma $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Există şi ecuaţii în care necunoscuta figurează atât în bază cât şi în exponent.
Metodă de rezolvare. Se ştie că dacă $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, atunci ecuaţia considerată este una exponenţială şi se reduce la rezolvarea ecuaţiei $g(x) = h(x)$. Vor fi soluţii acele valori x pentru care $f(x) > 0$ şi $f(x) \neq 1$. Dacă posibilitatea $f(x) \leq 0$ sau $f(x) = 1$ nu este eliminată de la început, atunci se analizează mai multe cazuri:
1) dacă $f(x) = 1$, atunci egalitatea se verifică oricare ar fi $g(x)$, $h(x)$;
2) dacă $f(x) = -1$, atunci egalitatea devine: $(-1)^{g(x)} = (-1)^{h(x)}$;
3) dacă $f(x) = 0$, atunci egalitatea are loc pentru $g(x) > 0$, $h(x) > 0$.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $(x-3)^{\frac{x+1}{4}} = (x-3)^{\frac{x-2}{3}}$.
R. Analizăm cazurile:
1°) $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$, atunci din ecuaţie rezultă ecuaţia $\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$ cu soluţia $x_1 = 11$.
2°) $x - 3 = 1$ şi de aici $x_2 = 4$ este soluţie a ecuaţiei.
3°) $x - 3 = -1$ când $x = 2$. Ecuaţia dată se scrie $(-1)^{\frac{3}{4}} = (-1)^0$, imposibil.
4°) $x - 3 = 0$ dă $x = 3$ şi ecuaţia devine $0^{\frac{4}{4}} = 0^{\frac{1}{3}}$. Deoarece $\frac{4}{4} > 0$ şi $\frac{1}{3} > 0$ rezultă că $x_3 = 3$ este soluţie a ecuaţiei.
Deci soluţiile ecuaţiei date sunt: $x_1 = 11$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$.

11.* Alte ecuaţii care conţin exponenţiale

Rezolvarea acestor ecuaţii nu mai este una standard. Tehnicile utilizate apelează la inegalităţi clasice (a mediilor, Cauchy-Buniakovski, etc.), la chestiuni de teoria numerelor întregi, la chestiuni de teoria funcţiilor convexe, etc. Există situaţii în care trebuie arătat că o ecuaţie de forma $f(x) = g(x)$, unde f este strict convexă, iar g este de gradul întâi, care are două soluţii $x_1 < x_2$, nu mai are şi altele. Presupunem prin absurd că ecuaţia ar mai avea o soluţie x_3. Să admitem că $x_3 \in (x_1, x_2)$. Atunci

există $\lambda \in (0,1)$ pentru care $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Deci
$f(x_3) = g(x_3) = \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, ceea ce contrazice faptul că f este strict convexă.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $9^x + 9^{\frac{1}{x}} = 18$; b) $8 - x \cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$;

c) $2\cos^2(\frac{x^2+x}{6}) = 2^x + 2^{-x}$; d) $3^{2x+1} - x \cdot 3^x - 3^x - 6x^2 - 7x - 2 = 0$.

R. a) Dacă $x < 0$, atunci $9^x < 1$, $9^{\frac{1}{x}} < 1$ şi deci $18 < 2$, fals.
Dacă $x > 0$, inegalitatea mediilor dă

$$9 = \frac{9^x + 9^{\frac{1}{x}}}{2} \geq \sqrt{9^{x+\frac{1}{x}}} \geq \sqrt{9^2} = 9.$$

Avem egalitate în inegalitate dacă $9^x = 9^{\frac{1}{x}}$, adică pentru $x = \frac{1}{x}$ sau $x = \pm 1$. Cum $x > 0$ se reţine doar soluţia $x = 1$.

b) Se notează $2^x = y$ şi ecuaţia $xy^2 + (x-8)y - 8 = 0$ are soluţiile $y_1 = \frac{8}{x}$, $y_2 = -1$.
Ecuaţia $2^x = \frac{8}{x}$, are soluţia unică $x = 2$. Ecuaţia $2^x = -1$ nu are soluţii.

c) Avem inegalităţile: $2\cos^2(\frac{x^2+x}{6}) \leq 2$, $2^x + 2^{-x} \geq 2$.
Deci egalitatea are loc dacă (simultan):

$$\begin{cases} \cos^2(\frac{x^2+x}{6}) = 1 \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie se obţine $x = 0$ care verifică şi prima ecuaţie.

d) Se pune $3^x = y > 0$ şi se rezolvă ecuaţia astfel obţinută în y.
Găsim $y_1 = 2x+1$, $y_2 = -x - \frac{2}{3}$. Prima ecuaţie are soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ şi nu mai are altele ($x \to 3^x$ este strict convexă, $x \to 2x+1$ este de gradul întâi), iar a doua ecuaţie are soluţia unică $x = -1$.
Ecuaţia dată are soluţiile: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

12. Ecuaţie exponenţială cu parametru

Să se determine toate valorile parametrului real m pentru care ecuaţia $4^x - m \cdot 2^x - m + 3 = 0$, are o singură soluţie.

R. Notând $2^x = y > 0$, ecuaţia devine $y^2 - my - m + 3 = 0$. Ecuaţia dată are o singură soluţie dacă şi numai dacă ecuaţia în y are o singură rădăcină pozitivă. Condiţiile care se impun sunt

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}, \text{ unde } \Delta \text{ este discriminantul ecuaţiei în } y, P$$

produsul, iar S suma rădăcinilor acestei ecuaţii.
Primul sistem de condiţii se scrie:

$$\begin{cases} (m-2)(m+6) > 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases}, \text{ cu soluţia } m > 3.$$

Al doilea sistem este:

$$\begin{cases} (m-2)(m+6) = 0 \\ m > 0 \end{cases}, \text{ cu soluţia } m = 2.$$

Deci ecuaţia dată are o singură soluţie dacă $m \in \{2\} \cup (3, \infty)$.

Inecuaţii exponenţiale

Pentru rezolvarea inecuaţiilor exponenţiale simple se utilizează monotonia funcţiei exponenţiale.
Funcţia exponenţială de bază $a > 0$, $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, este:
- **strict crescătoare** dacă $a > 1$ (dacă **baza este supraunitară**);
- **strict descrescătoare** dacă $0 < a < 1$ (dacă **baza este subunitară**).

Două inecuaţii exponenţiale se numesc **echivalente** dacă **au aceleaşi mulţimi de soluţii**. Schema de rezolvare a acestor inecuaţii este dată pentru cele două situaţii mai jos:

$$\begin{cases} a^{g(x)} > a^{h(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > h(x) \\ a > 1 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} a^{g(x)} > a^{h(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < h(x) \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

În cazul inecuaţiilor mai complicate $f(x) \geq 0$ (≤ 0), unde în membrul stâng figurează şi exponenţiale, pentru rezolvarea lor se poate aplica următoarea tehnică (argumentarea ei se face la cursul de Analiză matematică):

> - se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$;
> - se realizează tabelul de semn al funcţiei ţinând seamă de faptul că această funcţie dacă nu se anulează pe un interval,atunci are pe acest interval semn constant. Pentru a vedea semnul lui f pe un astfel de interval se alege de aici o valoare x_0 pentru care calculul $f(x_0)$ să fie cât mai simplu. Semnul lui $f(x_0)$ va fi pe tot intervalul analizat.

Această metodă vine să faciliteze rezolvarea inecuaţiilor având în vedere că am discutat detaliat rezolvarea ecuaţiilor exponenţiale.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve inecuaţiile exponenţiale:
a) $2^{4x} < 32$; b) $(\frac{2}{3})^{2-2x} \le (\frac{8}{27})^{x-2}$; c) $5^x - 3^{x+1} \ge 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$;
d) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; e) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$; f) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x \le 4$.

R. a) Metoda 1. Se scrie inecuaţia echivalent: $2^{4x} < 2^5$. Cum funcţia exponenţială $f(x) = 2^x$ este strict crescătoare, inegalitatea se scrie $f(4x) < f(5)$ şi rezultă $4x < 5$ (adică relaţia dintre valorile funcţiei se păstrează şi între argumente (exponenţi)). De aici $x < \frac{5}{4}$.

Metoda 2. Se aduce inecuaţia la forma $f(x) = 2^{4x} - 32 < 0$ şi se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$. Soluţia este $x = \frac{5}{4}$.
Tabelul de semn al funcţiei f este:

x	$-\infty$			$\frac{5}{4}$		∞
$f(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$

Deci $f(x) < 0$ dacă $x \in (-\infty, \frac{5}{4})$.

b) Metoda 1. Se aduce inecuaţia la forma echivalentă
$(\frac{2}{3})^{2-2x} \le (\frac{2}{3})^{3x-6} \Leftrightarrow 2 - 2x \ge 3x - 6 \Leftrightarrow 5x \le 8 \Leftrightarrow x \le \frac{8}{5}$, unde în prima echivalenţă am utilizat că funcţia $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ este strict descrescătoare.

Metoda 2. Se scrie inecuaţia $f(x) = (\frac{2}{3})^{2-2x} - (\frac{8}{27})^{x-2} \le 0$ şi se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$. Găsim soluţia $x = \frac{8}{5}$.
Tabelul de semn al lui f este:

x	$-\infty$		$\frac{8}{5}$		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Deci $f(x) \le 0$ dacă $x \in (-\infty, \frac{8}{5}]$.

c) Metoda 1. Se grupează exponenţialele cu o bază într-un membru, iar celelalte în celălalt membru. Inecuaţia se scrie echivalent:
$5^x - 2 \cdot 5^{x-1} \ge 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 5^{x-1}(5-2) \ge 3^{x-2}(3^3 - 2) \Leftrightarrow 3 \cdot 5^{x-1} \ge 25 \cdot 3^{x-2} \Leftrightarrow 5^{x-3} \ge 3^{x-3} \Leftrightarrow (\frac{5}{3})^{x-3} \ge 1 = (\frac{5}{3})^0 \Leftrightarrow x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$.
Deci mulţimea de soluţii este $[3, \infty)$.

Metoda 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x - 3^{x+1} - 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.
Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ şi se obţine soluţia $x = 3$. Tabelul de semn pentru f este:

x	$-\infty$		3		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Deci $f(x) \ge 0$ dacă $x \ge 3$.

d) Se aduce inecuaţia la forma $f(x) = 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$ şi se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$. Se găsesc soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Tabelul de semn al lui f este:

x	$-\infty$		0		1		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Deci $f(x) < 0$ dacă $x \in (0, 1)$.

e) Se scrie echivalent inecuaţia $f(x) = 4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x < 0$ şi se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ când se obţine soluţia $x = \log_{\frac{2}{5}} 2$.
Tabelul de semn al lui f este:

x	$-\infty$		$\log_{\frac{2}{5}} 2$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Deci $f(x) < 0$ dacă $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$.

f) Scriem echivalent inecuaţia $f(x) = (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x - 4 \le 0$.
Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.
Tabelul de semn al lui f este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Prin urmare $f(x) \le 0$ dacă $x \in [-1, 1]$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$; b) $2^x \ge 11 - x$; c) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$.

R. a) Se impune condiţia $3^{x+1} - 1 \ne 0$, adică $x \ne -1$. Se aduce inecuaţia la forma $f(x) = \frac{1}{3^x+5} - \frac{1}{3^{x+1}-1} < 0$.
Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ şi se obţine soluţia $x = 1$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Aşadar $f(x) < 0$ dacă $x \in (-1, 1)$.

b) Se aduce inecuaţia la forma $f(x) = 2^x + x - 11 \ge 0$. Funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ fiind suma a două funcţii strict crescătoare ($x \to 2^x$, $x \to x - 11$).
Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = 3$, care evident este unică.
Tabelul de semn al funcţiei este

x	$-\infty$		3		∞
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Deci $f(x) \ge 0$ dacă $x \in [3, \infty)$.

Observaţie. Din $f(x) \ge 0 = f(3)$ şi faptul că f este strict crescătoare se obţine soluţia inecuaţiei $x \ge 3$.

c) Radicalul există dacă $9^x - 3^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 3^x(3^x - 3^2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.
Se aduce inecuaţia la forma echivalentă $f(x) = \sqrt{9^x - 3^{x+2}} - 3^x + 9 > 0$.
Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = 2$. Tabelul de semn al funcţiei este

x	2		∞
$f(x)$	0	$+$	$+$

Prin urmare $f(x) > 0$ dacă $x \in (2, \infty)$.

Observaţie. După condiţie, rezolvarea inecuaţiei ar fi decurs (membrul drept este şi el pozitiv dacă $x \geq 2$) echivalent

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3^{x+2} > 3^4 \end{cases}, \text{ ceea ce dă } x > 2.$$

3. Să se discute inecuaţia exponenţială după valorile parametrului real a: $4^x - a \cdot 2^x + 3 - a \leq 0$.

R. Se notează $2^x = y > 0$ şi inecuaţia devine $y^2 - ay + 3 - a \leq 0$. Ca această inecuaţie să aibă soluţie ar trebui ca cel puţin o rădăcină reală a ecuaţiei $y^2 - ay + 3 - a = 0$, (1) să fie strict pozitivă.
Avem de analizat cazurile:
1°) o rădăcină a ecuaţiei (1) este strict pozitivă. Condiţia este: $P < 0$ (P produsul rădăcinilor). De aici găsim $a \in (3, \infty)$. Rădăcina pozitivă este $y_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4a-12}}{2}$. Din $2^x < y_1$ rezultă $x < \log_2 y_1$.
2°) ambele rădăcini ale ecuaţiei (1) sunt strict pozitive. Se impun condiţiile $\Delta \geq 0$, $S > 0$, $P > 0$. Se obţine $a \in [2, 3)$. În acest caz inecuaţia are soluţiile $x \in [\log_2 y_1, \log_2 y_2]$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile: 1) $3^{2x-1} = \sqrt{3^x}$; 2) $2^{3x} \cdot 5^x = 1600$;
3) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; 4) $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$; 5) $(\frac{2}{3})^x(\frac{9}{8})^x = \frac{27}{64}$;
6) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0,001(10^{3-x})^2$; 7) $27^{\frac{2x-1}{x}} = 9^{\frac{2x-1}{2}}$; 8) $(\frac{1}{4})^{\frac{4-x^2}{2}} = 8^x$;
9) $3^x(\frac{1}{3})^{x-3} = (\frac{1}{27})^x$; 10) $10^x + 10^{x-1} = 0,11$.

2. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $2^{x-1} = 5$; 2) $3^{x^2} = 1$; 3) $3^{x^2} = 2$; 4) $3^{1-|x|} = 1$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $2^{2x-1} \cdot 5^{x+3} = 3$; 2) $2^x \cdot 3^{x+1} \cdot 5^{x-2} = 7$; 3) $2^{4x} \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 1$;
4) $2^{x+1} = 3^{x-2}$; 5) $5^{3x+1} = 8^{2x-1}$; 6) $3^x \cdot 5^{x+1} = 4^{2x} \cdot 11^{2x+1}$;
7) $3^x \cdot 5^x = 7^{2x}$; 8) $6^{2x-1} \cdot 7^{3x-4} = 5^{6x}$.

4. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $3^{2x} - 3^x = 72$; 2) $4^x - 2^{x+1} - 48 = 0$; 3) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x - 475 = 0$;
4) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$; 5) $4^{2x-3} - 3 \cdot 4^{x-2} - 1 = 0$;
6) $25^{\sqrt{x-2}} - 5 \cdot 5^{\sqrt{x-2}} - 500 = 0$; 7) $12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} - 3^{\frac{1}{x}} = 27$;
8) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$;
9) $(1+\sqrt{3})^x + 2^{x-1}(2+\sqrt{3})^x = 4$;
10) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$;
11) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$; 12) $9^{\sqrt{x^2+3}} - 3^{1+\sqrt{x^2+3}} = 54$.

5. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $(3-2\sqrt{2})^x + (3+2\sqrt{2})^x = 34$; 2) $(7+\sqrt{48})^x + (7-\sqrt{48})^x = 14$;
3) $(2+\sqrt{3})^x - (2-\sqrt{3})^x = 2\sqrt{3}$;
4) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x = 34$; 5) $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^x + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^x = 3$.

6. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$; 2) $7^{x+2} - 7^x - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$;
3) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$; 4) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$.

7. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$; 2) $9^x + 4^x = \frac{5}{2} \cdot 6^x$; 3) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$;
4) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$; 5) $27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 2^{3x} = 0$.

8. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $2^x - (\frac{1}{2})^{2x} - (\frac{1}{2})^x + 1 = 0$; 2) $2^{3x+1} + 1 = 4^x + 2^{x+1}$;
3) $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}$; 4) $8 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 8 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} - 54 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 54 \cdot 2^{-\frac{1}{x}} = -101$;
5) $3^{2x} - \frac{18}{3^{2x}} - (3^x + \frac{6}{3^x}) = 2$; 6) $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$.

9. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $3^x + 4^x = 7$; 2) $1 + 2^x + 3^x = 36$; 3) $3^x + 4^x = 5^x$; 4) $3 + 5^{\frac{x}{3}} = 2^x$;
5) $2^{x+1} + 20 = 6^{x-1}$; 6) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$;
7) $7^{6-x} = x + 2$; 8) $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 1$;
9) $4^x + 9^x + 2 \cdot 6^x = 25^x$; 10) $2^x + 3^x + 12 = 5^x$.

10. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$; 2) $(3x-4)^{3x^2+2} = (3x-4)^{5x}$; 3) $x^{x+4} = x$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$; 2) $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$; 3) $2^{|x|} = \sin x^2$;
4) $2\cos\frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$; 5) $x \cdot 2^x = x(3-x) + 2(2^x - 1)$.

12. Să se discute ecuaţiile exponenţiale după valorile parametrului real m: 1) $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + m = 0$; 2) $4^x - 4m \cdot 2^x + 2m + 2 = 0$;
3) $4^x - 2m(m+1)2^{x-1} + m^3 = 0$.

13. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $5^x > 3125$; 2) $2^{4x} < 16$; 3) $(\frac{1}{64})^x > \sqrt{\frac{1}{8}}$; 4) $3^x(\frac{1}{3})^{x-3} \leq (\frac{1}{27})^x$;
5) $5^{x-3} \geq 7^{3-x}$; 6) $2^{3x-2} \geq 5^{x-\frac{2}{3}}$;

7) $15^{2x+4} - 3^{3x} \cdot 5^{4x-4} \leq 0$; 8) $3^x + 2^{x-1} - 2^{x+2} - 3^{x-1} + 2^{x-3} \geq 0$;
9) $7^x - 2^{x-2} \leq 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-1}$; 10) $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} > 0$.

14. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $0,1^{x+1} < 0,8 + 2 \cdot 10^x$; 2) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 \leq 0$; 3) $25^{-x} + 5^{-x+1} \geq 50$;
4) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$; 5) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$;
6) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0$; 7) $(3+\sqrt{8})^x + (3-\sqrt{8})^x > 6$;
8) $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x \geq 62$; 9) $(5+\sqrt{24})^x + (5-\sqrt{24})^x < 10$.

15. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $\frac{6}{2^x-1} < 2^x$; 2) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$; 3) $\frac{24}{1-25^{-x}} \leq \frac{1}{5^{-x}-6}$;
4) $\sqrt{4^{x+1}+17} - 5 > 2^x$; 5) $\sqrt{2(5^x+24)} - \sqrt{5^x-7} \geq \sqrt{5^x+7}$;
6) $(x^2+x+1)^x < 1$; 7) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$; 8) $3^x + 4^x > 7$;
9) $2^x + 3^x \geq 5^x$; 10) $3^x + 5^x + 6^x \geq \sqrt[3]{368^x}$;
11) $x^2 + (2 \cdot 3^x - 5)x + 9^x - 5 \cdot 3^x + 4 > 0$.

16. Să se rezolve şi discute inecuaţiile (după valorile parametrului real a): 1) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$; 2) $a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x > 0$.

17. Determinaţi valorile reale ale lui a astfel încât inegalitatea $a \cdot 9^x + 4(a-1)3^x + a - 1 > 0$, are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice

Ecuaţii logaritmice

Prin **ecuaţie logaritmică** vom înţelege o ecuaţie în care necunoscuta x figurează în expresii ce apar ca argumente ale logaritmilor sau baze ale acestora.

Se numeşte **soluţie** a unei ecuaţii logaritmice de necunoscută x un număr real x_0 cu proprietatea că punând $x = x_0$ în ecuaţie, aceasta se verifică.

A **rezolva** o ecuaţie logaritmică înseamnă a-i determina toate soluţiile.

Rezolvarea ecuaţiilor logaritmice se bazează pe proprietatea: doi logaritmi în aceeaşi bază sunt egali dacă argumentele sunt egale.

Două ecuaţii logaritmice se numesc **echivalente** dacă mulţimile de soluţii coincid.

În rezolvarea ecuaţiilor logaritmice sunt utile următoarele formule:

1) $\log(f(x)g(x)) = \begin{cases} \log f(x) + \log g(x), & \text{dacă } f(x) > 0,\ g(x) > 0 \\ \log(-f(x)) + \log(-g(x)), & \text{dacă } f(x) < 0,\ g(x) < 0 \end{cases}$

2) $\log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \begin{cases} \log f(x) - \log g(x), & \text{dacă } f(x) > 0,\ g(x) > 0 \\ \log(-f(x)) - \log(-g(x)), & \text{dacă } f(x) < 0,\ g(x) < 0 \end{cases}$

3) $\log f^2(x) = \begin{cases} 2\log f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 2\log(-f(x)), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$

Utilizarea incorectă a acestor formule, poate duce în rezolvarea ecuaţiilor sau inecuaţiilor logaritmice la omiterea unor soluţii.

De exemplu dacă ecuaţia $\log_2(x+2)^2 = 6$, s-ar face, aplicând formal formula 3) prima formă, ar rezulta pentru $x+2 > 0$, adică $x > -2$, $2\log_2(x+2) = 6$ şi de aici $\log_2(x+2) = 3$, adică $x + 2 = 8$ sau $x = 6$. Avem verificată cerinţa $6 > -2$.

Cum ecuaţia dată nu este echivalentă cu cea obţinută aplicând 3) (prima formă), se pierde soluţia $x = -10$, găsită aplicând 3) forma a doua. Într-adevăr avem dacă $x + 2 < 0$, adică $x < -2$, $2\log_2(-x-2) = 6$ sau $\log_2(-x-2) = 3$, iar de aici $x = -10$.

Rezolvarea corectă a ecuaţiei ar trebui să decurgă astfel:

Se impune condiţia $(x+2)^2 > 0$, adică $x \neq -2$ şi apoi se analizează cazurile:

1°) $x < -2$. Ecuaţia se scrie (conform cu 3) a doua formă):
$\log_2(-x-2) = 3$, cu soluţia $x = -10 \in (-\infty, -2)$, care este soluţie a ecuaţiei date;

2°) $x > -2$. Ecuaţia devine (conform cu 3) prima formă)
$\log_2(x+2) = 3$ când $x = 6 \in (-2, \infty)$ care este de asemenea soluţie a ecuaţiei date.

Deci ecuaţia dată are soluţiile $x_1 = -10$, $x_2 = 6$.

Pentru rezolvarea unor astfel de ecuaţii se recomandă parcurgerea următorilor paşi:

1) Se determină domeniul de existenţă al ecuaţiei (mai sus $x \neq -2$).
2) Se împarte domeniul de existenţă în două mulţimi A, B (mai sus $A = (-\infty, -2)$, $B = (-2, \infty)$).
3) Se rezolvă ecuaţia pe A ($x = -10$).
4) Se rezolvă ecuaţia pe B ($x = 6$).
5) Se face reuniunea soluţiilor de la 3) şi 4), care va fi mulţimea de soluţii a ecuaţiei date iniţial.

Ecuaţia dată mai sus este echivalentă cu reuniunea sistemelor

$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ 2\log_2(-x-2) = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 > 0 \\ 2\log_2(x+2) = 6. \end{cases}$$

Observaţie. Condiţiile de existenţă pentru o ecuaţie logaritmică **se pun la începutul rezolvării ei** şi nu după ce aceasta a fost transformată ! Ca şi în cazul ecuaţiilor exponenţiale vom prezenta cele mai importante tipuri de ecuaţii logaritmice.

1. Ecuaţii logaritmice de forma: $\log_{g(x)} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Metodă de rezolvare. Ecuaţia este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{(logaritmul are sens din numere strict pozitive)} \\ \left.\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{array}\right\} & \text{(baza logaritmului este strict pozitivă şi diferită de unu)} \\ f(x) = (g(x))^a & \text{(este aplicată definiţia logaritmului unui număr)} \end{cases}$$

Se rezolvă ecuaţia din sistem şi valorile găsite pentru x vor fi soluţii dacă se verifică

$f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$.

În nici un caz nu se rezolvă mai întâi inecuaţiile şi apoi ecuaţia !

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$; b) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = -1$.

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 3x + 1 = x + 1. \end{cases}$$

Rezolvând ecuaţia din sistem se obţin valorile $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Cum $x_1 = 0$ nu verifică $x_1 + 1 \neq 1$ se deduce că această valoare nu este soluţie a ecuaţiei.

Valoarea $x_2 = 4$ verifică toate cerinţele din sistem şi deci este soluţie a ecuaţiei date.

Deci, ecuaţia dată are soluţia $x = 4$.

b) Ecuaţia dată este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \quad (\text{ca să existe } \log_{\frac{1}{2}}) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) > 0 \quad (\text{ca să existe } \log_{\frac{1}{3}}) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = (\frac{1}{3})^{-1} \quad (\text{definiţia } \log_{\frac{1}{3}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) > 0 \\ x + 1 = (\frac{1}{2})^3. \end{cases}$$

Ecuaţia sistemului are soluţia $x = -\frac{7}{8}$, care verifică celelalte condiţii din sistem. Deci, ecuaţia dată are soluţia $x = -\frac{7}{8}$.

2. Ecuaţii logaritmice ce conţin logaritmi în aceeaşi bază

Dacă ecuaţia are forma simplă: $\log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} h(x)$, atunci aceasta este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{(ca să existe logaritmul din membrul stâng)} \\ h(x) > 0 & \text{(ca să existe logaritmul din membrul drept)} \\ \left.\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{array}\right\} & \text{(baza logaritmilor este strict pozitivă şi diferită de unu)} \\ f(x) = h(x) & \text{(funcţia logaritmică este injectivă)} \end{cases}$$

Se rezolvă ecuaţia $f(x) = h(x)$. Dintre valorile obtinute vor fi soluţii ale ecuaţiei date numai acelea care verifică şi celelalte condiţii din sistem.

Dacă ecuaţia este mai complexă atunci se pun mai întâi condiţiile de existenţă asupra logaritmilor pentru ecuaţia dată, după care utilizând proprietăţile logaritmilor:

$\log_a A - \log_a B = \log_a(\frac{A}{B})$, $\log_a A + \log_a B = \log_a(AB)$, $m \log_a A = \log_a A^m$

se aduce ecuaţia la tipul precedent.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3x + 21)$; b) $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$;

c) $\log_3(x - 2) + \log_3 x = \log_3 8$; d) $\log_2(\frac{x-2}{x-1}) = 1 + \log_2(\frac{3x-7}{3x-1})$.

R. a) Ecuaţia dată este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ (condiţia de existenţă a logaritmului din membrul stâng)} \\ 3x + 21 > 0 \text{ (condiţia de existenţă a logaritmului din membrul drept)} \\ x^2 - 4x + 3 = 3x + 21 \text{ (funcţia } \log_3(\cdot) \text{ este injectivă)} \end{cases}$$

Ecuaţia din sistem are soluţiile $x_1 = -2$, $x_2 = 9$, care verifică şi inegalităţile sistemului, deci sunt soluţii ale ecuaţiei date.

Observaţie. Condiţia $3x + 21 > 0$ este superfluă, ea rezultând din prima şi a treia condiţie.

b) Ecuaţia este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1 \\ x^2 - 1 = 5 - x. \end{cases}$$

Se rezolvă ecuaţia din sistem şi se obţin valorile $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Cum pentru $x_1 = -3$ nu se verifică relaţia $x_1 + 4 \neq 1$, această valoare nu este soluţie a ecuaţiei date. Valoarea $x = 2$ verifică tot sistemul de condiţii. Deci este soluţie a ecuaţiei date.

c) Ecuaţia dată este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \\ \log_3 x(x-2)=\log_3 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x(x-2)=8. \end{cases}$$

Ecuaţia din sistem are soluţiile $x_1=-2$, $x_2=4$. Cum $x>2$ reţinem doar $x=4$.
Ecuaţia dată are soluţia $x=4$.

d) Ecuaţia dată se scrie echivalent:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-1}>0 \\ x-1\neq 0 \\ \frac{3x-7}{3x-1}>0 \\ 3x-1\neq 0 \\ \log_2(\frac{x-2}{x-1})=\log_2 2+\log_2(\frac{3x-7}{3x-1}). \end{cases}$$

Ecuaţia din sistem devine:
$\log_2(\frac{x-2}{x-1})=\log_2 2(\frac{3x-7}{3x-1})$, iar de aici $\frac{x-2}{x-1}=2(\frac{3x-7}{3x-1})$, ecuaţie ce are soluţiile $x_1=\frac{4}{3}$, $x_2=3$.
Numai $x=3$ verifică celelalte condiţii ale sistemului.

3. Ecuaţii logaritmice ce conţin logaritmi în baze diferite

Metodă de rezolvare. Se impun condiţiile de existenţă asupra logaritmilor. Se aduc logaritmii în aceeaşi bază utilizând formula

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a},\ a,b>0,\ a,b\neq 1$$

de trecere de la baza a la baza b pentru numărul $x>0$.
Se procedează apoi ca la tipul precedent.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x=9$; b) $\log_5^2 x+\log_{5x}(\frac{5}{x})=1$.

R. a) Logaritmii există dacă $x>0$. Observăm că logaritmii au bazele: 2, $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}=2^{-1}$, diferite puteri ale lui 2. De aceea îi aducem în baza 2. Avem:

$$\log_{\sqrt{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}=2\log_2 x,\quad \log_{\frac{1}{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2 x.$$

Ecuaţia se scrie echivalent (pentru $x>0$)
$2\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 x=9\Leftrightarrow 3\log_2 x=9\Leftrightarrow \log_2 x=3\Leftrightarrow x=8>0$.
Deci, ecuaţia dată are soluţia $x=8$.

b) Se impun condiţiile $x>0$, $5x\neq 1$ şi se aduc logaritmii în baza 5. Ecuaţia se scrie echivalent:

$$\log_5^2 x+\frac{\log_5(\frac{5}{x})}{\log_5(5x)}=1\Leftrightarrow \log_5^2 x+\frac{1-\log_5 x}{1+\log_5 x}=1.$$

Pentru a uşura scrierea notăm $\log_5 x=y$ şi se ajunge la ecuaţia $y^3+y^2-2y=0$, cu soluţiile $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=-2$.
Ecuaţia dată este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor:

$$\log_5 x=0,\ \log_5 x=1,\ \log_5 x=-2,$$

care dau soluţiile $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=\frac{1}{25}$, care verifică cerinţele impuse la începutul rezolvării. Acestea sunt soluţiile ecuaţiei date.

4. Ecuaţii exponenţial - logaritmice

Prezentăm câteva probleme pentru a ilustra categoria de ecuaţii pe care o circumscrie titulatura.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_2(9-2^x)=3-x$; b) $x^{\log_x(x+3)^2}=16$; c) $3\cdot x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$;
d) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$; e) $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

R. a) Ecuaţia este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} 9-2^x>0 \\ 9-2^x=2^{3-x}. \end{cases}$
Ecuaţia are soluţiile $x_1=0$, $x_2=3$ care verifică inegalitatea din sistem. Deci ambele valori sunt soluţii ale ecuaţiei date.

b) Se impun condiţiile de existenţă $x>0$, $x\neq 1$.
Pentru a rezolva ecuaţia utilizăm egalitatea (definiţia logaritmului) $a^{\log_a b}=b$. Ecuaţia devine $(x+3)^2=16$ cu rădăcinile $x_1=1$, $x_2=-7$, care însă nu verifică celelalte condiţii ($x>0$, $x\neq 1$).
Deci ecuaţia dată nu are soluţii.

c) Se impune condiţia $x>0$. Pentru rezolvarea ecuaţiei se utilizează egalitatea $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$.
Ecuaţia se scrie echivalent (pentru $x>0$)
$3\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64\Leftrightarrow 4\cdot 2^{\log_5 x}=64\Leftrightarrow 2^{\log_5 x}=2^4\Leftrightarrow \log_5 x=4\Leftrightarrow x=5^4=625$, care este soluţie a ecuaţiei date.

d) Se impune condiţia $x>0$ şi se scrie echivalent astfel:
$(3^{\log_3 x})^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162\Leftrightarrow x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162\Leftrightarrow x^{\log_3 x}=81$.
Pentru rezolvarea ultimei ecuaţii se logaritmează ambii membri în bază 3 şi rezultă $\log_3^2 x=4$, iar de aici avem de rezolvat ecuaţiile $\log_3 x=-2$, $\log_3 x=2$ cu soluţiile $x_1=\frac{1}{9}$ şi respectiv $x_2=9$.
Ambele valori sunt soluţii ale ecuaţiei date.

e) Domeniul de existenţă al ecuaţiei este $x>0$. Cum cei doi membri

sunt pozitivi se poate logaritma ecuaţia, aici în baza 2 (deoarece logaritmii care sunt în structura ecuaţiei au baza 2) şi se obţine ecuaţia echivalentă:
$\log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log_2^2 x = \frac{1}{4}\log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x = 8 \Leftrightarrow |\log_2 x| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$\log_2 x = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{\pm 2\sqrt{2}} > 0$.
Deci soluţiile ecuaţiei date sunt: $2^{\pm 2\sqrt{2}}$.

5. Ecuaţii logaritmice cu soluţie unică

Metodele de rezolvare ale acestui gen de probleme sunt diverse. Cea mai uzitată, aplicabilă la o ecuaţie de forma $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, constantă, şi care are o rădăcină $x_0 \in \mathbb{R}$, apelează la monotonia funcţiei f.
Dacă f este strict monotonă (este injectivă) atunci soluţia x_0 este unică.
O altă metodă utilizează inegalităţile clasice (a mediilor, Cauchy-Buniakovski-Schwartz) şi anume în cazul în care avem egalitate în aceste inegalităţi.
Alt procedeu constă în evidenţierea unei soluţii x_0 şi apoi să demonstrăm că dacă $x \neq x_0$, membrul stâng al ecuaţiei este diferit de membrul drept.

Probleme rezolvate

Să se arate că ecuaţiile de mai jos au soluţii unice:
a) $x + 2^x + \log_2 x = 7$; b) $9^{\log_5(x-1)} - 5^{\log_9(x+3)} = 4$;
c) $x = \log_3(x^3 + 2^x)$, $x \in \mathbb{N}^*$; d) $\log_{x+\frac{1}{x}} 4 = x + \frac{1}{x}$;
e) $\log_x 2(1-x) + \log_{1-x}(2x) = 0$; f) $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 2x - x^2$;
g) $\log_2(2 + \log_2 x) = 1 + \sqrt{\log_2(\log_2 x)}$; h) $\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1)$.

R. a) Se impune condiţia $x > 0$ şi se consideră funcţia
$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^x + \log_2 x$ care este o funcţie strict crescătoare (sumă de funcţii strict crescătoare). Se vede că $x = 2$ este soluţie unică a ecuaţiei.

b) Ecuaţia există dacă $x > 1$. Notăm $\log_5(x-1) = a$, $\log_9(x+3) = b$, iar de aici $x = 5^a + 1$ şi respectiv $x = 9^b - 3$, care egalate dau $9^b - 5^a = 4$.
Pe de altă parte ecuaţia se scrie $9^a - 5^b = 4$. Scăzând aceste ultime două egalităţi rezultă $(9^b - 9^a) + (5^b - 5^a) = 0$.
De aici $a = b$ (dacă $a < b$, atunci $9^a < 9^b$, $5^a < 5^b$, iar membrul stâng ar fi strict pozitiv, fals; analog $a > b$ ne conduce la contradicţie).
Acum ecuaţia devine $9^a - 5^a = 4$, cu soluţia evidentă $a = 1$.
Se aduce această ecuaţie la forma $f(a) = 4(\frac{1}{9})^a + (\frac{5}{9})^a = 1$, unde funcţia f este strict descrescătoare. Deci soluţia este unică. Pentru $a = 1$ rezultă $x = 6$.

c) Se vede că $x = 1$ este soluţie. Ecuaţia se aduce la forma $3^x = x^3 + 2^x$. Pentru $x = 2$, $x = 3$, ecuaţia nu se verifică, iar pentru $x \geq 4$ se arată inductiv că $3^x > x^3 + 2^x$.

d) Din $x + \frac{1}{x} > 0$, adică $\frac{x^2+1}{x} > 0$ rezultă $x > 0$. Atunci $x + \frac{1}{x} \geq 2$, cu egalitate dacă $x = 1$. Ecuaţia se scrie echivalent $(x + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{x}} = 4$.
Dacă $x \neq 1$, atunci $(x + \frac{1}{x})^{x+\frac{1}{x}} > 2^2 = 4$.
Deci ecuaţia are soluţia unică $x = 1$.

e) Condiţiile de existenţă ale ecuaţiei dau $x \in (0, 1)$. Se trec logaritmii în baza 2 şi ecuaţia devine echivalent:
$\frac{1+\log_2(1-x)}{\log_2 x} + \frac{1+\log_2 x}{\log_2(1-x)} = 0$.
Se notează $\log_2 x = a$, $\log_2(1-x) = b$ şi ecuaţia devine $a + a^2 + b + b^2 = 0$ (să observăm că $a, b < 0$). Din $a + b = -(a^2 + b^2) \leq -\frac{(a+b)^2}{2}$ rezultă $(a+b)(a+b+2) \leq 0$ şi deci $a + b + 2 \geq 0$, adică $a + b \geq -2$. Deci $\log_2 x + \log_2(1-x) \geq -2$ sau $\log_2 x(1-x) \geq -2$ dă $x(1-x) \geq \frac{1}{4}$ sau încă $(x - \frac{1}{2})^2 \leq 0$. De aici $x - \frac{1}{2} = 0$, adică $x = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ este unica soluţie a ecuaţiei.

f) Se impune $x > 0$ şi se scrie ecuaţia echivalent: $\log_2(x + \frac{1}{x}) = 2x - x^2$.
Se vede că $x = 1$ este soluţia ecuaţiei. Cum $x > 0$ implică $x + \frac{1}{x} \geq 2$ şi de aici ($\log_2$ este strict crescătoare) $\log_2(x + \frac{1}{x}) \geq \log_2 2 = 1$. Pe de altă parte funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$ are valoarea maximă pentru $x = 1$ când $f(1) = 1$. Deci dacă $x > 0$, $x \neq 1$, membrul stâng este strict mai mare decât unu, în timp ce membrul drept este strict mai mic decât unu.
De aici $x = 1$ este unica soluţie a ecuaţiei date.

g) Condiţiile de existenţă conduc la $x \geq 2$. Se scrie ecuaţia sub forma:
$$\sqrt{\log_2(\log_2 x)} = \log_2 \frac{2+\log_2 x}{2}, \quad (1)$$
Cum $\frac{2+\log_2 x}{2} \geq \sqrt{2\log_2 x}$ (inegalitatea mediilor) avem:
$\log_2 \frac{2+\log_2 x}{2} \geq \log_2 \sqrt{2\log_2 x} = \frac{1}{2}(1 + \log_2(\log_2 x)) \geq \sqrt{\log_2(\log_2 x)}$ (ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor), (2).
Din (1) şi (2) avem peste tot egalitate. Avem egalitate în inegalitatea mediilor dacă numerele sunt egale, adică dacă $\log_2 x = 2$ şi $\log_2(\log_2 x) = 1$. De aici rezultă $x = 4 \in [2, \infty)$. Aceasta este unica soluţie a ecuaţiei date.

h) Ecuaţia are sens dacă $x > 0$. Funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = \log_3(2^x + 1)$ este bijectivă, având inversa $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2(3^x - 1)$.
Ecuaţia se scrie echivalent $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$, ($f$ strict crescătoare), deoarece, se ştie, graficele funcţiilor f, f^{-1} sunt simetrice în raport cu prima bisectoare ($y = x$). Deci valorile $f(x)$, $f^{-1}(x)$ vor coincide pe

$y = x$, când $f(x) = f^{-1}(x) = x$. Ecuaţia $f(x) = x \Leftrightarrow \log_3(2^x + 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 1 = 3^x \Leftrightarrow (\frac{2}{3})^x + (\frac{1}{3})^x = 1$ cu soluţia unică $x = 1$.

6. Discuţia unei ecuaţii logaritmice

Să se determine valorile reale ale lui a pentru care ecuaţia

$$2\lg(x+3) = \lg(ax)$$

are o singură rădăcină reală.

R. Ecuaţia dată este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ ax>0 \\ (x+3)^2 = ax, \quad (*). \end{cases}$$

Ecuaţia dată are o singură rădăcină dacă acest sistem are o singură rădăcină.

Ecuaţia din $(*)$ devine $x^2 - (a-6)x + 9 = 0$, (1)

care are rădăcini reale dacă $(a-6)^2 - 36 = a^2 - 12a \geq 0$, adică $a \in (-\infty, 0] \cup [12, \infty)$.

Dacă $a = 0$, atunci în $(*)$ nu se verifică a doua relaţie.

Dacă $a = 12$, atunci $x = 3$ şi verifică sistemul $(*)$.

Din $x + 3 > 0$, adică $x > -3$ trebuie impus ca ecuaţia (1) să aibă o singură rădăcină strict mai mare ca -3 (cealaltă este mai mică sau egală cu -3). Deci trebuie ca $x_1 > -3$, $x_2 \leq -3$ ceea ce are loc dacă $x_1 + 3 > 0$, $x_2 + 3 \leq 0$, adică dacă $(x_1+3)(x_2+3) \leq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + 3(x_1+x_2) + 9 \leq 0$. Utilizând relaţiile lui Viète pentru ecuaţia (1) rezultă $9 + 3(a-6) + 9 \leq 0$, adică $a \leq 0$. Cum $a < 0$ sau $a > 12$ se deduce $a < 0$. Deci şi în acest caz, adică pentru $a < 0$, ecuaţia are o singură rădăcină.

Aşadar, ecuaţia dată are o singură rădăcină dacă $a \in (-\infty, 0) \cup \{12\}$.

Inecuaţii logaritmice

Rezolvarea inecuaţiilor logaritmice simple reclamă cunoaşterea monotoniei funcţiei logaritmice de bază $a > 0$, $a \neq 1$, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$.

Această funcţie este:

- **strict crescătoare** dacă $a > 1$ (dacă **baza este supraunitară**);
- **strict descrescătoare** dacă $0 < a < 1$ (dacă **baza este subunitară**).

Practic tehnicile de reducere a inecuaţiilor logaritmice la altele mai simple sunt cele prezentate la ecuaţiile logaritmice.

Două inecuaţii logaritmice se numesc **echivalente** dacă **au aceleaşi mulţimi de soluţii**.

Schema de rezolvare a inecuaţiilor simple este dată pentru cele patru situaţii mai jos.

$$1)\ \begin{cases} \log_a f(x) > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ a > 1 \end{cases};$$

$$2)\ \begin{cases} \log_a f(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < a < 1 \end{cases};$$

$$3)\ \begin{cases} \log_a f(x) < 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ a > 1 \end{cases};$$

$$4)\ \begin{cases} \log_a f(x) < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

În cazul inecuaţiilor mai complicate $g(x) \geq 0$ (≤ 0), unde în membrul stâng figurează şi logaritmi ce au în argument necunoscuta x, pentru rezolvarea ei se poate aplica tehnica utilizată la inecuaţii exponenţiale:

- se rezolvă ecuaţia $g(x) = 0$;
- se realizează tabelul de semn al funcţiei g ţinând seamă de faptul că această funcţie dacă nu se anulează pe un interval, atunci are pe acest interval semn constant. Pentru a vedea semnul lui g pe un astfel de interval se alege de aici o valoare x_0 pentru care calculul $g(x_0)$ să fie cât mai simplu. Semnul lui $g(x_0)$ se păstrează pe tot intervalul analizat.

Această metodă facilitează rezolvarea inecuaţiilor logaritmice dat fiind faptul că am studiat în detaliu rezolvarea ecuaţiilor logaritmice $g(x) = 0$.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve inecuaţiile logaritmice:

a) $\log_2(2x-1) > 0$; b) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq 0$; c) $\frac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$;

d) $\log_3(1-2x) \geq \log_3(5x-2)$; e) $\log_{\frac{1}{2}}(3^{x+1} - 3) > \log_{\frac{1}{2}}(3^x + 1)$.

R. a) Metoda 1. Inecuaţia are sens dacă $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$.

Se scrie echivalent $\log_2(2x-1) > \log_2 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

Deci mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $S = (1, \infty)$.

Metoda 2. Se impune condiţia $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$ şi se consideră funcţia $f : (\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(2x-1)$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = 1$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Deci $f(x) > 0$ dacă $x > 1$.

b) Metoda 1. Se impune condiţia $5x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{5}$. Inecuaţia se scrie echivalent $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow 5x - 1 \leq 1$ (am utilizat monotonia funcţiei logaritmice cu bază subunitară). De aici $x \leq \frac{2}{5}$. Cum $x > \frac{1}{5}$ rezultă $x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$.

Metoda 2. Din $5x - 1 > 0$ rezultă $x > \frac{1}{5}$. Se consideră funcţia $f : (\frac{1}{5}, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(5x-1)$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = \frac{2}{5}$. Tabelul de semn al funcţiei este

x	$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Deci $f(x) \geq 0$ dacă $x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$.

c) Se impun condiţiile $x + 1 > 0$, $x - 1 \neq 0$, adică $x > -1$, $x \neq 1$.
Se realizează tabelul de semn pentru numărător, numitor şi cât (C)

x	-1		0		1	$+\infty$
$\log_2(x+1)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
C		$+$	0	$-$	$\|$	$+$

Câtul este strict pozitiv dacă $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$. Aceasta este mulţimea de soluţii ale inecuaţiei date.

d) Metoda 1. Inecuaţia este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 5x - 2 > 0 \\ 1 - 2x \geq 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ 7x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{7}].$$

Deci mulţimea de soluţii ale inecuaţiei este $S = (\frac{2}{5}, \frac{3}{7}]$.

Metoda 2. Condiţiile de existenţă sunt $1 - 2x > 0$, $5x - 2 > 0$.
De aici $x \in (\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$.
Se consideră funcţia $f : (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(1-2x) - \log_3(5x-2)$.
Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = \frac{3}{7}$. Tabelul de semn al funcţiei este

x	$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{7}$		$\frac{1}{2}$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Deci $f(x) \geq 0$ dacă $x \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{7}]$.

e) Inecuaţia este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 3^{x+1} - 3 > 0 \\ 3^{x+1} - 3 < 3^x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x(3-1) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3^x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \log_3 2 \end{cases}$$

Deci $x \in (0, \log_3 2)$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > 1$; b) $1 - 2\log_{\frac{1}{9}}(x+2) > \log_3(x-3)$;

c) $\log_{x+1}(3x-1) > 1$; d) $(\frac{1}{2})^{\log^2_{\frac{1}{2}} x} \leq x^3$; e) $x^2 + x + \lg x \geq 2$;

f) $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

R. a) Metoda 1. Se impun condiţiile $x - 2 > 0$, $x - 3 > 0$, adică $x > 3$.
Inecuaţia se scrie echivalent $\log_8 \frac{(x-2)^2}{x-3} > \log_8 8 = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-3} > 8 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 28 > 0$.
Soluţiile ultimei inecuaţii sunt $x \in (-\infty, 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}, \infty)$.
Cum $x > 3$, mulţimea de soluţii a inecuaţiei date este: $S = (3, 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}, \infty)$.

Metoda 2. Scriem inecuaţia $f(x) = 2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) - 1 > 0$, unde $f : (3, \infty) \to \mathbb{R}$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 6 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = 6 + 2\sqrt{2}$. Tabelul de semn al funcţiei este

x	3		$6-2\sqrt{2}$		$6+2\sqrt{2}$		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Deci $f(x) > 0$ dacă $x \in (3, 6 - 2\sqrt{2}) \cup (6 + 2\sqrt{2}, \infty)$.

b) Se aduce logaritmul din membrul stâng în baza 3 şi inecuaţia se scrie echivalent:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ 1 + \log_3(x+2) > \log_3(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3(x+2) > x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > -\frac{9}{2}. \end{cases}$$

De aici $x > 3$.

c) Inecuaţia este echivalentă cu reuniunea sistemelor:

(1) $\begin{cases} 0 < 3x - 1 < x + 1 \\ 0 < x + 1 < 1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} 3x - 1 > x + 1 \\ x + 1 > 1 \end{cases}$

(după poziţia bazei $x + 1$ în raport cu 1).
Primul sistem nu are soluţie, iar al doilea are mulţimea de soluţii $(1, \infty)$.
Pentru a obţine mulţimea de soluţii a inecuaţiei date se face reuniunea mulţimilor de soluţii de la cele două sisteme. Găsim $S = (1, \infty)$.

d) Se impune condiţia $x > 0$. Se logaritmează inecuaţia în baza $\frac{1}{2}$ (subunitară) şi devine echivalent:

$\log^2_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}) \geq \log_{\frac{1}{2}} x^3 \Leftrightarrow \log^2_{\frac{1}{2}} x \geq 3\log_{\frac{1}{2}} x$.

Notăm $\log_{\frac{1}{2}} x = y$ şi inecuaţia devine $y^2 - 3y \geq 0$ cu soluţiile $y \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$. De aici $y \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow y \leq 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Deci o mulţime de soluţii a inecuaţiei este $S_1 = [1, \infty)$.
Din $y \in [3, \infty)$ se obţine $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 3 = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^3 \Rightarrow x \leq \frac{1}{8}$ şi $x > 0$, adică

$S_2 = (0, \frac{1}{8}]$ este o altă mulţime de soluţii.

În final mulţimea de soluţii a inecuaţiei date este: $S = S_1 \cup S_2 = (0, \frac{1}{8}] \cup [1, \infty)$.

Observaţie. Determinaţi mulţimea de soluţii folosind semnul funcţiei.

e) Se impune $x > 0$ şi se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x) + \lg x$ care este strict crescătoare (sumă de astfel de funcţii) şi în plus $f(1) = 2$.

Deci inecuaţia se scrie $f(x) \geq f(1)$, iar de aici $x \geq 1$.

Mulţimea de soluţii a inecuaţiei este: $S = [1, \infty)$.

f) Se impun condiţiile $x > 0$, $\lg x - 1 \neq 0$, adică $x > 0$, $x \neq 10$.

Se aduce inecuaţia la forma $\frac{\lg^2 x - 4\lg x + 4}{\lg x - 1} < 0$

şi se realizează tabelul de semn pentru numărător (N), numitor (M) şi cât (C).

x	0		10		100	∞
N	+	+	+	+	0	+
M	−	−	0	+	+	+
C	−	−	|	+	0	+

Deci câtul este negativ dacă $x \in (0, 10)$ şi aceasta este mulţimea de soluţii a inecuaţiei date.

3. Să se determine valorile parametrului real a pentru care inagalitatea $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a)$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

R. Inegalitatea are sens dacă $x^2 + 1 > 0$, $ax^2 + 4x + a > 0$ şi în plus aceste inegalităţi să aibă loc $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Prima se verifică $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. A doua are loc $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ dacă $a > 0$ şi $4 - a^2 < 0$, adică dacă $a \in (2, \infty)$, (1).

Inegalitatea este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} 5(x^2 + 1) \geq ax^2 + 4x + a \\ (\forall)\, x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - a)x^2 - 4x + 5 - a \geq 0 \\ (\forall)\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Inegalitatea are loc $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ dacă $5 - a > 0$ şi $4 - (5 - a)^2 \leq 0$, adică $a \in (-\infty, 3]$, (2).

Din (1) şi (2) rezultă $a \in (2, 3]$, care este mulţimea cerută.

4. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $2\log_4(x + 3) - \log_2(x + 1) < 1$ este:

a) $(1, \infty)$; b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; c) $(\frac{2}{3}, \infty)$; d) $(-1, \infty)$; e) $(0, \infty)$.

R. Condiţiile de existenţă $x + 3 > 0$, $x + 1 > 0$ dau $x > -1$. Se aduce primul logaritm în baza 2 şi inecuaţia devine echivalent $\log_2 \frac{x+3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} < 2 \Leftrightarrow x > 1$. Deci $x \in (1, \infty) \subset (-1, \infty)$. Răspuns corect a).

Sisteme de ecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Prin **sistem de ecuaţii exponenţiale** înţelegem un sistem de ecuaţii în care cel puţin o ecuaţie este exponenţială.

Prin **sistem de ecuaţii logaritmice** înţelegem un sistem de ecuaţii în care cel puţin o ecuaţie este logaritmică.

Tehnicile de rezolvare a acestor sisteme sunt cele cunoscute de la tipurile de sisteme studiate (omogene, simetrice, iraţionale) în urma unor substituţii combinate cu metodele de rezolvare ale ecuaţiilor exponenţiale şi (sau) logaritmice.

Alteori inegalităţi cunoscute pot conduce la rezolvarea sistemelor.

În cele ce urmează prezentăm câteva sisteme de două ecuaţii cu două necunoscute.

1. Să se rezolve sistemele: a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 36 \\ 2^x + 3^y = 13 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^x \cdot 3^y = 10 \\ 2^x \cdot 3^y + 3^{2y} = 15 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^{2x+y} + 5^{2x+y} = 8^{2x+y} \\ 4^{x-2y} + 5^{x-2y} = 41 \end{cases}$; f) $\begin{cases} (2 + \sqrt{3})^{x-y} + (2 - \sqrt{3})^{x-y} = 14 \\ (4 + \sqrt{15})^{2x+3y} + (4 - \sqrt{15})^{2x+3y} = 62 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 3^y = 8 \\ 2^x \cdot 3^{3y} = 16 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x^3 + 3^x = y^3 + 3^y \\ x^3 + 24 = 2^y, \quad y \in \mathbb{N} \end{cases}$; i)* $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

R. a) Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} y = 1 - x \\ 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \end{cases}$ şi observăm că a doua ecuaţie este exponenţială.

Notăm $3^x = z > 0$ şi a doua ecuaţie a sistemului devine $z^2 - 4z + 3 = 0$ cu soluţiile $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Revenim la substituţie şi obţinem $3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$ sau $3^x = 3 \Rightarrow x_2 = 1$.

Pentru $x_1 = 0$ din $y = 1 - x$ avem $y_1 = 1$, iar pentru $x_2 = 1$ se obţine $y_2 = 0$.

Deci soluţiile sistemului sunt: $(0, 1), (1, 0)$.

b) Metoda de rezolvare este cea a substituţiei. Pentru $2^x = a > 0$, $3^y = b > 0$ şi sistemul devine un sistem simetric fundamental în a, b:

$\begin{cases} ab = 36 \\ a + b = 13 \end{cases}$ cu soluţiile $(a_1 = 4,\ b_1 = 9)$, $(a_2 = 9,\ b_2 = 4)$.

Revenim la substituţie şi avem de rezolvat sistemele

$\begin{cases} 2^x = 4 \\ 3^y = 9 \end{cases}$, $\begin{cases} 2^x = 9 \\ 3^y = 4. \end{cases}$

Primul sistem are soluţia $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, iar al doilea sistem $x_2 = \log_2 9$, $y_2 = \log_3 4$.

Soluţiile sistemului dat sunt: $(2,2), (\log_2 9, \log_3 4)$.

c) Substituim $2^x = a > 0$, $3^y = b > 0$ şi se obţine sistemul omogen $\begin{cases} a^2 + ab = 10 \\ ab + b^2 = 15 \end{cases}$ cu soluţiile: $(a_1 = 2, b_1 = 3), (a_2 = -2, b_2 = -3)$.

Cum $a, b > 0$ se reţine soluţia $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. Revenim la substituţie şi găsim $x = 1$, $y = 1$.

Deci soluţia sistemului dat este: $(1,1)$.

d) O ecuaţie a sistemului se înlocuieşte prin produsul celorlalte două şi obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 1296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ (2 \cdot 3)^{x+y} = 1296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 6^{x+y} = 6^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ 2^x \cdot 3^{4-x} = 24. \end{cases}$$

A doua ecuaţie a sistemului devine $(\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^3$, cu soluţia $x = 3$. Din prima ecuaţie $y = 4 - x$ găsim $y = 1$.

Soluţia sistemului dat este: $(3,1)$.

e) În prima ecuaţie a sistemului fiecare termen are acelaşi exponent $2x+y$. Vom împărţi prima ecuaţie cu 8^{2x+y} şi ecuaţia devine $(\frac{3}{8})^{2x+y} + (\frac{5}{8})^{2x+y} = 1$. Dacă punem $2x + y = t$, atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = (\frac{3}{8})^t + (\frac{5}{8})^t$ este strict descrescătoare (deci injectivă). Ecuaţia $f(t) = 1$ are soluţia $t = 1$ care este unică (f este injectivă). Deci $2x + y = 1$.

Analog din a doua ecuaţie $x - 2y = 2$. Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ cu soluţia $x = \frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$.

Soluţia sistemului dat este $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

f) Să observăm că fiecare ecuaţie are în componenţă exponenţiale având produsul bazelor egal cu 1. Prin urmare vom aplica aceeaşi metodă de rezolvare de la ecuaţiile exponenţiale de acest tip. Prima ecuaţie a sistemului este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor $x-y = 2$, $x-y = -2$. A doua ecuaţie a sistemului este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor $2x + 3y = 2$, $2x+3y = -2$. Se rezolvă patru sisteme de ecuaţii cu aceste ultime patru ecuaţii când obţinem soluţiile $(\frac{8}{5}, -\frac{2}{5}), (\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}), (-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}), (-\frac{8}{5}, \frac{2}{5})$, care sunt şi soluţii ale sistemului dat.

g) Notăm $2^x = a > 0$, $3^y = b > 0$ şi sistemul se rescrie echivalent: $\begin{cases} a + 3b = 8 \\ a \cdot b^3 = 16. \end{cases}$ Utilizăm inegalitatea mediilor şi avem:

$2 = \frac{a+3b}{4} = \frac{a+b+b+b}{4} \geq \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{16} = 2.$

Avem egalitate în inegalitatea mediilor dacă $a = b$, iar din prima ecuaţie $a = b = 2$. Deci $x = 1$, $y = \log_3 2$ este soluţia sistemului.

h) Prima ecuaţie a sistemului ne sugerează considerarea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3^x$ care este strict crescătoare (sumă de astfel de funcţii) şi deci injectivă. În acest fel această ecuaţie se scrie $f(x) = f(y)$, iar din injectivitatea lui f rezultă $x = y$. A doua ecuaţie devine $x^3 + 24 = 2^x$. Pentru $x = 10$ se verifică ecuaţia, iar pentru $x > 10$, $x \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $2^x > x^3$. Deci soluţia sistemului este $x = y = 10$.

i) Se verifică $x = 2$, $y = 1$ soluţie a sistemului. Dacă $x < 2$, $y \leq 1$, atunci $3^x + 3^y < 9 + 3 = 12$, ceea ce arată că nici un număr $x < 2$ şi nici un număr $y \leq 1$ nu este soluţie a sistemului. Analog dacă $x < 2$, $y \geq 1$, atunci $2^x - 2^y < 4 - 2 = 2$ şi deci nici un număr $x < 2$ şi nici un număr $y \geq 1$ nu este soluţie a sistemului, etc.

2. Să se rezolve sistemele: a) $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln(\frac{3}{5}) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x + y) - \log_2(2x - y) = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ x = 16y \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^{\lg y} y^{\lg x} = \frac{1}{100} \\ xy = 1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} y x^{\log_y x} = x^2\sqrt{x} \\ \log_3 y \cdot \log_y(y - 2x) = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2(y-1) = 1 \\ \log_8 x \cdot \log_{\sqrt{2}}(y-1) = -\frac{4}{3} \end{cases}$; g) $\begin{cases} x^{\log_3 x} = 81 \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$; h) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$

R. a) Se pun condiţiile de existenţă pentru logaritmi din ecuaţia a doua $x, y > 0$. Se restrânge a doua ecuaţie utilizând proprietatea $\ln a + \ln b = \ln ab$.

A doua ecuaţie devine $\ln(xy) = \ln \frac{3}{5} \Rightarrow xy = \frac{3}{5}$. Sistemul se rescrie $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ xy = \frac{3}{5} \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{4})$, $(x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = 1)$.

Deci soluţiile sistemului dat sunt: $(\frac{4}{5}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{5}, 1)$.

b) Condiţiile de existenţă pentru logaritmi sunt $2x + y > 0$, $2x - y > 0$ şi a doua ecuaţie a sistemului se restrânge astfel $\log_2 \frac{2x+y}{2x-y} = 1$, iar de aici $\frac{2x+y}{2x-y} = 2$.

Sistemul devine $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ 2x + y = 2(2x - y) \end{cases}$ cu soluţia $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, care verifică cerinţele de mai sus.

Soluţia sistemului este: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

c) Se impun condiţiile de existenţă pentru logaritmi $x, y > 0$, $x, y \neq 1$. Scriind prima ecuaţie sub forma $\log_y x - \frac{1}{\log_y x} = \frac{8}{3}$ găsim

Soluţiile sistemului dat sunt: $(2,2), (\log_2 9, \log_3 4)$.

c) Substituim $2^x = a > 0$, $3^y = b > 0$ şi se obţine sistemul omogen $\begin{cases} a^2 + ab = 10 \\ ab + b^2 = 15 \end{cases}$ cu soluţiile: $(a_1 = 2, b_1 = 3), (a_2 = -2, b_2 = -3)$.

Cum $a, b > 0$ se reţine soluţia $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. Revenim la substituţie şi găsim $x = 1$, $y = 1$.

Deci soluţia sistemului dat este: $(1,1)$.

d) O ecuaţie a sistemului se înlocuieşte prin produsul celorlalte două şi obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 1296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ (2 \cdot 3)^{x+y} = 1296 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 6^{x+y} = 6^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ 2^x \cdot 3^{4-x} = 24. \end{cases}$$

A doua ecuaţie a sistemului devine $(\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^3$, cu soluţia $x = 3$. Din prima ecuaţie $y = 4 - x$ găsim $y = 1$.

Soluţia sistemului dat este: $(3,1)$.

e) În prima ecuaţie a sistemului fiecare termen are acelaşi exponent $2x+y$. Vom împărţi prima ecuaţie cu 8^{2x+y} şi ecuaţia devine $(\frac{3}{8})^{2x+y} + (\frac{5}{8})^{2x+y} = 1$. Dacă punem $2x + y = t$, atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = (\frac{3}{8})^t + (\frac{5}{8})^t$ este strict descrescătoare (deci injectivă). Ecuaţia $f(t) = 1$ are soluţia $t = 1$ care este unică (f este injectivă). Deci $2x + y = 1$.

Analog din a doua ecuaţie $x - 2y = 2$. Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ cu soluţia $x = \frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$.

Soluţia sistemului dat este $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

f) Să observăm că fiecare ecuaţie are în componenţă exponenţiale având produsul bazelor egal cu 1. Prin urmare vom aplica aceeaşi metodă de rezolvare de la ecuaţiile exponenţiale de acest tip. Prima ecuaţie a sistemului este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor $x-y = 2$, $x-y = -2$. A doua ecuaţie a sistemului este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor $2x + 3y = 2$, $2x+3y = -2$. Se rezolvă patru sisteme de ecuaţii cu aceste ultime patru ecuaţii când obţinem soluţiile $(\frac{8}{5}, -\frac{2}{5}), (\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}), (-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}), (-\frac{8}{5}, \frac{2}{5})$, care sunt şi soluţii ale sistemului dat.

g) Notăm $2^x = a > 0$, $3^y = b > 0$ şi sistemul se rescrie echivalent: $\begin{cases} a + 3b = 8 \\ a \cdot b^3 = 16. \end{cases}$ Utilizăm inegalitatea mediilor şi avem:

$2 = \frac{a+3b}{4} = \frac{a+b+b+b}{4} \geq \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Avem egalitate în inegalitatea mediilor dacă $a = b$, iar din prima ecuaţie $a = b = 2$. Deci $x = 1$, $y = \log_3 2$ este soluţia sistemului.

h) Prima ecuaţie a sistemului ne sugerează considerarea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3^x$ care este strict crescătoare (sumă de astfel de funcţii) şi deci injectivă. În acest fel această ecuaţie se scrie $f(x) = f(y)$, iar din injectivitatea lui f rezultă $x = y$. A doua ecuaţie devine $x^3 + 24 = 2^x$. Pentru $x = 10$ se verifică ecuaţia, iar pentru $x > 10$, $x \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $2^x > x^3$. Deci soluţia sistemului este $x = y = 10$.

i) Se verifică $x = 2$, $y = 1$ soluţie a sistemului. Dacă $x < 2$, $y \leq 1$, atunci $3^x + 3^y < 9 + 3 = 12$, ceea ce arată că nici un număr $x < 2$ şi nici un număr $y \leq 1$ nu este soluţie a sistemului. Analog dacă $x < 2$, $y \geq 1$, atunci $2^x - 2^y < 4 - 2 = 2$ şi deci nici un număr $x < 2$ şi nici un număr $y \geq 1$ nu este soluţie a sistemului, etc.

2. Să se rezolve sistemele: a) $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ \ln x + \ln y = \ln(\frac{3}{5}) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x + y) - \log_2(2x - y) = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ x = 16y \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^{\lg y} y^{\lg x} = \frac{1}{100} \\ xy = 1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} y x^{\log_y x} = x^2 \sqrt{x} \\ \log_3 y \cdot \log_y(y - 2x) = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2(y-1) = 1 \\ \log_8 x \cdot \log_{\sqrt{2}}(y-1) = -\frac{4}{3} \end{cases}$; g) $\begin{cases} x^{\log_3 x} = 81 \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$; h) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$

R. a) Se pun condiţiile de existenţă pentru logaritmi din ecuaţia a doua $x, y > 0$. Se restrânge a doua ecuaţie utilizând proprietatea $\ln a + \ln b = \ln ab$.

A doua ecuaţie devine $\ln(xy) = \ln \frac{3}{5} \Rightarrow xy = \frac{3}{5}$. Sistemul se rescrie $\begin{cases} 5x + 4y = 7 \\ xy = \frac{3}{5} \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{3}{4})$, $(x_2 = \frac{3}{5}, y_2 = 1)$.

Deci soluţiile sistemului dat sunt: $(\frac{4}{5}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{5}, 1)$.

b) Condiţiile de existenţă pentru logaritmi sunt $2x + y > 0$, $2x - y > 0$ şi a doua ecuaţie a sistemului se restrânge astfel $\log_2 \frac{2x+y}{2x-y} = 1$, iar de aici $\frac{2x+y}{2x-y} = 2$.

Sistemul devine $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ 2x + y = 2(2x - y) \end{cases}$ cu soluţia $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, care verifică cerinţele de mai sus.

Soluţia sistemului este: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

c) Se impun condiţiile de existenţă pentru logaritmi $x, y > 0$, $x, y \neq 1$. Scriind prima ecuaţie sub forma $\log_y x - \frac{1}{\log_y x} = \frac{8}{3}$ găsim

$\log_y x \in \{3, -\frac{1}{3}\}$ (se notează $t = \log_y x$)
Sistemul este echivalent cu reuniunea sistemelor
$\text{I} \begin{cases} \log_y x = 3 \\ x = 16y \end{cases}$; $\text{II} \begin{cases} \log_y x = -\frac{1}{3} \\ x = 16y \end{cases}$

Primul sistem se rescrie echivalent $\begin{cases} x = y^3 \\ x = 16y \end{cases}$, care conduce la ecuaţia $y^3 = 16y$ cu $y = 4 > 0$, când $x = 64$. Deci acest sistem are soluţia $(64, 4)$.
Analog al doilea sistem are soluţia $x = 2$, $y = \frac{1}{8}$.
Sistemul dat are soluţiile: $(64, 4), (2, \frac{1}{8})$.

d) Condiţiile de existenţă pentru sistem sunt $x > 0$, $y > 0$. Se logaritmează ambele ecuaţii în baza zece şi se obţine sistemul
$\begin{cases} \lg x \cdot \lg y = -1 \\ \lg x + \lg y = 0 \end{cases}$ cu soluţiile $(x_1 = \frac{1}{10}, y_1 = 10), (x_2 = 10, y_2 = \frac{1}{10})$.
Sistemul dat are soluţiile: $(\frac{1}{10}, 10), (10, \frac{1}{10})$.

e) Se impun condiţiile $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$, $y - 2x > 0$. Se logaritmează prima ecuaţie în baza y, iar a doua $\log_3 y$ se trece în baza y.
Sistemul devine $\begin{cases} 1 + (\log_y x)^2 = \frac{5}{2} \log_y x \\ y - 2x = 3. \end{cases}$
Din prima ecuaţie $\log_y x = 2$ sau $\log_y x = \frac{1}{2}$.
Sistemul este echivalent cu reuniunea sistemelor:
$\text{I} \begin{cases} \log_y x = 2 \\ y = 3 + 2x \end{cases}$; $\text{II} \begin{cases} \log_y x = \frac{1}{2} \\ y = 3 + 2x. \end{cases}$
Doar al doilea sistem are soluţia $x = 3$, $y = 9$, care este soluţie şi pentru sistem.

f) Sistemul există dacă $x > 0$, $y > 1$. Cum logaritmii nu au aceeaşi bază, se aduc în aceeaşi bază 2 şi sistemul se scrie
$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y-1) = 1 \\ \log_2 x \cdot \log_2(y-1) = -2 \end{cases}$, în care se notează $u = \log_2 x$, $v = \log_2(y-1)$. Soluţiile sistemului dat sunt: $(4, \frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, 5)$.

g) Condiţiile de existenţă pentru sistem sunt $x, y > 0$. Se logaritmează ambele ecuaţii în baza 3 şi se obţine sistemul
$\begin{cases} (\log_3 x)^2 = 4 \\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 4 + \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log_3 x = -2 \\ \log_3 y = -1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 y = 3 \end{cases} \right)$
Primul sistem are soluţia $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{1}{3}$, iar al doilea sistem are soluţia $x = 9$, $y = 27$. Sistemul dat are soluţiile $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}), (9, 27)$.

h) Dacă $x > 0$, $y > 0$, atunci prin logaritmarea ambelor ecuaţii în aceeaşi bază zece se obţine sistemul:
$\begin{cases} (x+y)\lg x = 12 \lg y \\ (x+y)\lg y = 3 \lg x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\lg y = 3\lg x \\ \frac{\lg x}{\lg y} = 4\frac{\lg y}{\lg x} \end{cases}$ (*)
(a doua ecuaţie este câtul celor două ecuaţii date dacă $\lg x \neq 0$, $\lg y \neq 0$)
Pentru $\lg x = 0$, $\lg y = 0$, adică $x = y = 1$ sistemul se verifică şi deci $(1, 1)$ este soluţie a sistemului.
Sistemul (*) este echivalent cu sistemul
$\begin{cases} (x+y)\lg y = 3\lg x \\ \lg^2 x = 4 \lg^2 y \end{cases} \Leftrightarrow$
$\left(\begin{cases} (x+y)\lg y = 3\lg x \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} (x+y)\lg y = 3\lg x \\ \lg x = -2 \lg y \end{cases} \right)$.
Numai primul sistem admite soluţia $x = 4$, $y = 2$.
Soluţiile sistemului dat sunt: $(1, 1), (4, 2)$.

Sisteme de inecuaţii exponenţiale şi logaritmice

Prin **sistem de inecuaţii exponenţiale (logaritmice)** de necunoscută x se înţelege un sistem care conţine cel puţin o inecuaţie exponenţiale (logaritmică) de necunoscută x.

> Domeniul de existenţă al sistemului se obţine intersectând domeniile de existenţă ale inecuaţiilor care compun sistemul.

Un număr x_0 din domeniul de existenţă al sistemului se numeşte **soluţie a sistemului** dacă x_0 este soluţie a fiecărei inecuaţii care compune sistemul. Prin urmare soluţia unui sistem de inecuaţii se obţine intersectând soluţiile inecuaţiilor care-l compun. Practic se rezolvă fiecare inecuaţie şi se determină mulţimea de soluţii, după care se face intersecţia acestor mulţimi.
Totuşi noi vom determina mulţimea de existenţă a sistemului, iar rezolvarea inecuaţiilor o vom face pe această mulţime.
A rezolva un sistem de inecuaţii înseamnă a-i determina mulţimea soluţiilor.
Tehnicile specifice tipurilor de inecuaţii exponenţiale şi logaritmice studiate vor facilita rezolvarea sistemelor de inecuaţii exponenţiale şi logaritmice.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve sistemele de inecuaţii: a) $\begin{cases} 2^{4x} \leq 16 \\ (\frac{1}{0.125})^x < 128 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2^{2x+1} + 2^{x+2} < 16 \\ (\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x < 10 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \geq 28 \\ 5^{x+1} + 5^x < 750 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^{x+2}+2^{x+4}>5^{x+1}+3\cdot 5^x \\ 4\cdot 2^{2x}-6^x>18\cdot 3^{2x} \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2^{3x+1}+1\le 4^x+2^{x+1} \\ 1+(\sqrt{3})^x>2^x. \end{cases}$

R. a) Sistemul se scrie echivalent

$$\begin{cases} 2^{4x}\le 2^4 \\ (\frac{1000}{125})^x<2^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x\le 4 \\ 2^{3x}<2^7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 3x<7. \end{cases}$$

Găsim mulţimea de soluţii $S=(-\infty,1]\cap(-\infty,\frac{7}{3})=(-\infty,1]$.

b) Pentru a rezolva prima inecuaţie se notează $2^x=y>0$ şi se obţine $S_1=(-\infty,1)$, iar pentru rezolvarea celei de-a doua inecuaţii se observă că produsul bazelor exponenţialelor este egal cu 1, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}}=1$. Se notează $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=y>0$. Mulţimea de soluţii a acestei inecuaţii este $S_2=(-2,2)$. Mulţimea S de soluţii a sistemului de inecuaţii este egală cu $S=S_1\cap S_2=(-2,1)$.

c) Sistemul se scrie echivalent:

$$\begin{cases} 2^x\cdot 7\ge 28 \\ 5^x\cdot 6<750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x\ge 4 \\ 5^x<125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x\ge 2^2 \\ 5^x<5^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x<3. \end{cases}$$

Deci $S=[2,\infty)\cap(-\infty,3)=[2,3)$.

d) Sistemul devine echivalent: $\begin{cases} 2^{x+2}\cdot 5>5^x\cdot 8 \\ 4\cdot(\frac{2}{3})^{2x}-(\frac{2}{3})^x-18>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (\frac{2}{5})^{x-1}>1 \\ (\frac{2}{3})^x>(\frac{3}{2})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ (\frac{2}{3})^x>(\frac{2}{3})^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<-2. \end{cases}$$

De aici $S=(-\infty,1)\cap(-\infty,-2)=(-\infty,-2)$.

e) Sistemul se scrie echivalent: $\begin{cases} (2^{x+1}-1)(2^{2x}-1)\le 0 \\ (\frac{1}{2})^x+(\frac{\sqrt{3}}{2})^x>1. \end{cases}$

Prima inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1=[-1,0]$, iar a doua inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_2=(-\infty,2)$. Deci mulţimea S de soluţii a sistemului este $S=S_1\cap S_2=[-1,0]$.

2. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} \log_3(2x+1)<2 \\ \log_{\frac{1}{3}}(3x-1)\ge 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log_3(\frac{1+2x}{1+x})<1 \\ \log_{\frac{1}{4}}(\frac{x-3}{x+3})<-\frac{1}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \log_3|x-1|<1 \\ \log_{\frac{1}{2}}\log_3(\frac{x+1}{x-1})\ge 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \log_3(x+2)+\log_3(x-2)<\log_3(4x+1) \\ \log_{\frac{1}{5}}(4-x)\ge\log_{\frac{1}{5}}2-\log_{\frac{1}{5}}(x-1) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2(x+14)+2\log_4(x+2)<2\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8}) \\ \log_{\frac{1}{4}}(x+1)\ge -2\log_{\frac{1}{16}}2+\log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x+3) \end{cases}$;

f) $\begin{cases} \log_{2x+4}(x^2-x)>1 \\ \log_{2x}(x^2-5x+6)<1. \end{cases}$

R. a) Condiţiile de existenţă pentru logaritmi sunt $2x+1>0$, $3x-1>0$, adică $x>\frac{1}{3}$.

Sistemul se scrie echivalent

$$\begin{cases} 2x+1<9 \\ 3x-1\le\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\le\frac{4}{9} \\ x>\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ De aici } x\in(\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{9}]=S.$$

b) Domeniul de existenţă al sistemului rezultă din condiţiile $\frac{1+2x}{1+x}>0$, $\frac{x-3}{x+3}>0$, $x\ne -1$, $x\ne -3$, când se obţine $x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)=D$.

Sistemul de inecuaţii este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \frac{1+2x}{1+x}<3 \\ \frac{x-3}{x+3}>(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x-2}{1+x}<0 \\ \frac{x-3}{x+3}>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}>0 \\ \frac{-x-9}{x+3}>0. \end{cases}$$

Prima inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1=[(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)]\cap D=(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, iar a doua inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_2=(-9,-3)\cap D=(-9,-3)$.

Mulţimea S de soluţii a sistemului este egală cu $S=S_1\cap S_2=(-9,-3)$.

Observaţie. Să remarcăm că $\frac{x-3}{x+3}>(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ implică $\frac{x-3}{x+3}>0$. De aceea este de preferat scrierea sistemului sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} 0<\frac{1+2x}{1+x}<3 \\ \frac{x-3}{x+3}>(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \\ x\ne -1,\ x\ne -3. \end{cases}$$

c) Sistemul are sens dacă $x\ne 1$, $\frac{x+1}{x-1}>0$, $\log_3(\frac{x+1}{x-1})>0$ ceea ce dă $D=(1.\infty)$. Sistemul se scrie echivalent

$$\begin{cases} |x-1|<3 \\ \log_3\frac{x+1}{x-1}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x-1<3 \\ \frac{x+1}{x-1}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<4,\ x>1 \\ \frac{x-2}{x-1}\ge 0. \end{cases}$$

Prima inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1=(1,4)$, iar a doua inecuaţie dă mulţimea de soluţii $S_2=[(-\infty,1)\cup[2,\infty)]\cap D=[2,\infty)$.

Mulţimea de soluţii a sistemului dat este $S=S_1\cap S_2=[2,4)$.

d) Prima inecuaţie există pentru $x>2$, iar a doua inecuaţie are sens dacă $x\in(1,4)$. Deci sistemul de inecuaţii este definit pentru $x\in(2,4)=D$. Pe mulţimea D sistemul se scrie echivalent

$$\begin{cases} \log_3(x-2)(x+2)<\log_3(4x+1) \\ \log_{\frac{1}{5}}(4-x)\ge\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)<4x+1 \\ 4-x\le\frac{2}{x-1}. \end{cases}$$

Prima inecuaţie are pe D mulţimea de soluţii $S_1=(2,4)$, iar a doua inecuaţie (pe aceeaşi mulţime) are mulţimea de soluţii $S_2=[3,4)$. În fine mulţimea de soluţii a sistemului dat este $S=S_1\cap S_2=[3,4)$.

e) Prima inecuaţie are sens dacă $x > -2$, iar a doua inecuaţie există dacă $x > -1$. Deci $D = (-1, \infty)$. În prima inecuaţie se aduc logaritmii în baza 2 şi se obţine mulţimea de soluţii $S_1 = (-1, 2)$, iar pentru a doua ecuaţie $S_2 = (-1, \infty)$. Mulţimea $S = S_1 \cap S_2 = (-1, 2)$ reprezintă mulţimea de soluţii a sistemului.

f) Prima inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1 = (-\frac{3}{2}, -1) \cup (4, \infty)$, iar a doua inecuaţie are mulţimea de soluţii $S_2 = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2) \cup (3, 6)$. În final sistemul are soluţiile $S = S_1 \cap S_2 = (4, 6)$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\log_{\sqrt{x-1}}(x^4 - 8x^2 - 2x + 1) = 4$; 2) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$;

3) $\log_7(2x^2 - 5x + 3) = 2$; 4) $\log_{x^2-x-2} x = 1$;

5) $\log_{x-1}(x^2 - 3x + 1) = 2$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$;

7) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \left(\frac{x^2-2x}{x-3}\right) = 0$; 8) $\lg \lg \lg x = 0$;

9) $\log_4 \log_2 \log_3(2x - 1) = \frac{1}{2}$.

2. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{x+2}{10}\right) = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{2}{x+1}\right)$; 2) $\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{2x^2-54}{x+3}\right) = \log_{\frac{1}{10}}(x - 4)$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 4) = \log_{\frac{1}{3}}(2x + 2)$; 4) $\log_4(3^x + 1) = \log_4(-2^x + 14)$;

5) $\log_{x-2}(2x - 9) = \log_{x-2}(23 - 6x)$; 6) $\log_{5x-2}(2x^2) = \log_{5x-2}(x + 1)$;

7) $\log_2(3 - x) + \log_2(1 - x) = 3$; 8) $\log_5(2x - 5) + \log_5(2x - 1) = 1$;

9) $\log_3(5x - 2) - 2\log_3 \sqrt{3x + 1} = 1 - \log_3 4$;

10) $\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = 3 + \log_5 8$;

11) $\log_7(x - 2) - \log_7(x + 2) = 1 - \log_7(2x - 7)$;

12) $\lg(x - 2) - \frac{1}{2}\lg(3x - 6) = \lg 2$;

13) $\lg \sqrt{x + 21} + \lg \sqrt{x - 21} = 1 + \lg 2$;

14) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$;

15) $\log_5^4(x - 2)^2 + \log_5^2(x - 2)^3 = 25$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 2) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;

3) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$; 4) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{2}$;

5) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$; 6) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$;

7) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{x}{3}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$; 8) $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$;

9) $\log_2(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 2\log_2 3$;

10) $\frac{\log_4 \sqrt{x}\, 2}{\log_{2x} 2} + (\log_{2x} 2)(\log_{\frac{1}{2}}(2x)) = 0$; 11) $\sqrt{\log_x(3x)} \cdot \log_3 x + \sqrt{2} = 0$;

12) $\log_x(5x^2)\log_5^2 x = 1$; 13) $\sqrt{\log_5 \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = 1$;

14) $\frac{\log_2(2^{x+2}+12)}{\log_{2^x+3} 2} = 8$; 15) $\sqrt{\log_9(9x^3)\log_3(9x)} = \log_3 x^2$.

4. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\log_2(2^x - 3) + x = 2$; 2) $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$;

3) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$;

4) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$;

5) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$; 6) $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$; 7) $x^{2+\log_2 x} = 256$;

8) $x^{\log_3(3x)} = 9$; 9) $\sqrt[5]{x^{\log_3 x}} = 243$; 10) $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x+3)}$;

11) $2^{\log_2^2 x+1} = x^{2\log_2 x} - 48$; 12) $x^{1+\log_3 x} = 9x^2$; 13) $\sqrt{(2x)^{\lg \sqrt{2x}}} = 10$;

14) $9^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 27$; 15) $25^{\log_x 5} \cdot x^{\log_5 x} = 125$;

16) $x^{\log_3(x+1)} + (x + 1)^{\log_3 x} = 2x^2$; 17) $x^{\lg(x-1)} + 3(x - 1)^{\lg x} = 4(x - 1)^2$.

5. Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\log_3 x = 4 - x$; 2) $3^x = 10 - \log_2 x$; 3) $x \log_3 x = 18$;

4) $\log_3 x = \frac{4}{x+1}$; 5) $3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$;

6) $7^{\log_5(x-1)} - 5^{\log_7(x+1)} = 2$; 7) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

8) $x^{\log_2 3} = x + 1$; 9) $(2x)^{\frac{x^2}{2}} = 16$; 10) $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$;

11) $\lg(x^3 + x) = \log_2(x)$.

6. Să se rezolve şi discute ecuaţiile logaritmice după valorile parametrului real a:

1) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2 x} a = 0$; 2) $\log_a x + \log_{\sqrt{a}} x + \log_{\sqrt[3]{a^2}} x = 27$;

3) $x^{\log_a x} = a^2 x$; 4) $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right) = 1$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}(9^x + a) + \log_3(2 \cdot 3^x) = 0$.

7. Să se rezolve inecuaţiile:

1) $\log_2(2x - 1) > -2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(1 + 2x) > -1$; 3) $\log_5(3x - 1) < 1$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$; 5) $\lg(x^2 - 5x + 7) < 0$;

6) $\log_2\left(\frac{2x-8}{x-2}\right) < 0$; 7) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1$; 8) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) \geq -\frac{1}{2}$;

9) $\log_2\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq -1$; 10) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}{x-4} < 0$; 11) $\frac{x-5}{\log_3(x-2)} \geq 0$;

12) $\frac{\log_2(x-3)}{x^2-25} > 0$; 13) $(x - 1)\log_{\frac{1}{5}}(x + 7) \leq 0$;

14) $\log_{\frac{1}{2}}\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right) < 0$; 15) $\log_{\frac{1}{2}}\log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$;

16) $\log_5(1 - x) < \log_5(x + 3)$; 17) $\log_7(7x - 3) \geq \log_7(1 - 2x)$;

18) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 4) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 3)$;

19) $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x+7}{2x+3}\right) < \log_{\frac{1}{5}}(5 - x)$; 20) $\lg \sqrt{x^2 - 3x + 4} > \lg \sqrt{x + 1}$.

8. Să se rezolve inecuaţiile:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) < \log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}}(x + 2)$;

2) $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) < \log_3(4x + 1)$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(4-x) \geq \log_{\frac{1}{5}} 2 - \log_{\frac{1}{5}}(x-1)$;
4) $\lg(x-1) + \lg(x-2) < \lg(x+2)$;
5) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+5) - \log_{\frac{1}{5}}(16-x^2) \leq 1$; 6) $\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x$;
7) $\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\frac{1}{9}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}} 6$;
8) $\frac{1}{2} + \log_3 x - \log_3(5x) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;
9) $\log_2(x+14) + 2\log_4(x+2) < 2\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{8})$;
10) $\frac{3}{2}\log_2 2\sqrt[3]{x} - 2\log_4 x \geq 1$; 11) $\log_3 \sqrt{x} - 2\log_9 x > 2$;
12) $\log_2(x-3)(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) < -\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3$;
13) $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$;
14) $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) < 6$; 15) $\log_{2x}(5x-3) \leq 1$;
16) $\log_{x^2}(3-2x) > 1$; 17) $\log_{|x-1|}(x^2-1) < 1$; 18) $\log_{x-3}(x-1) < 2$;
19) $\log_x(\frac{2x-1}{x-1}) > 1$; 20) $\log_x|x-2| < 1$; 21) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$.

9. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $x^{\log_4 x + 1} > 256x$; 2) $x^{\lg x} > 10$; 3) $x^{\log_2 x} < 32$; 4) $x^{\lg x} > 10 \cdot x^{-\lg x}$;
5) $(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \leq 2^{3x-4}$; 6) $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leq 30$;
7) $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} < 17$; 8) $(x-2)^{\log_{\frac{1}{3}} x} + 5x^{\log_{\frac{1}{3}}(x-2)} \geq 6(x-2)$;
9) $x^3 + \lg(x-1) < 8$; 10) $x^2 + x - \log_3(2-x) \geq 2$;
11) $\frac{\log_2(x-3)}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} \geq 0$; 12) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}{\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)} < 0$; 13) $|4 - \log_2 x| > 2$;
14) $|\log_2(x^2+x-4)| < 1$; 15) $\frac{1}{\log_3 x - 2} > \frac{1}{\log_3 x}$;
16) $\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 2} < \frac{2}{\log_2 x + 6}$; 17) $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$;
18) $\sqrt{\log_2(\frac{3x-1}{2-x})} < 1$; 19) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+3}+5)} < \frac{1}{2}$; 20) $\frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 81} + 2}{\log_{\frac{1}{2}} x - 1} < 1$.

10. Să se rezolve sistemele:
1) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} xy = y^x \\ x^3 = y^2,\ y > 0 \end{cases}$;
4) $\begin{cases} y^{\frac{1}{x}} = 2 \\ y^x = 16 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} |x|^y = 9 \\ 324^{\frac{1}{y}} = 2x^2 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$;
7) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$, $x, y > 0$; 8) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^x = y^y \end{cases}$, $x, y > 0$;
9) $\begin{cases} 4^{x+y} = 27 + 9^{x-y} \\ 8^{x+y} - 21 \cdot 2^{x+y} = 27^{x-y} + 7 \cdot 3^{x-y+1} \end{cases}$; 10) $\begin{cases} 3^{x+2y} + 4^{x+2y} = 7 \\ 2^{2x-y} + 5^{2x-y} = 7 \end{cases}$;
11) $\begin{cases} (2+\sqrt{3})^{x-2y} + (2-\sqrt{3})^{x-2y} = 4 \\ (3+\sqrt{8})^{3x+y} + (3-\sqrt{8})^{3x+y} = 6 \end{cases}$;
12)* $\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$; 13)* $\begin{cases} x^2 + 11^x = y^3 \\ x^2 + 28 = 2^y,\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

11. Să se rezolve sistemele:
1) $\begin{cases} x + y = 7 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \ln x + 2\ln y = 5 \\ 3\ln x - \ln y = 1 \end{cases}$;
3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ \ln x + \ln y = \ln 15 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y} = 2^{3-y} \\ \log_3(x-2y) + \log_3(3x+2y) = 3 \end{cases}$;
5) $\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7 \\ \log_4(x+y) = 2 \end{cases}$;
7) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x \\ x^y = 4^6 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x^{\log_3 x} = 81 \\ y^{\log_3 x} = 81x \end{cases}$;
10) $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y(y-3x) = 1 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 5 \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$;
12) $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$; 13)* $\begin{cases} 2^x + 2^y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$;
14)* $\begin{cases} x^2 - y^2 = \ln(\frac{y}{x}) \\ 2x^2 - 3yx + 2y^2 = 9 \end{cases}$; 15)* $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y = \frac{1}{6} \\ (\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{27})^y = \frac{5}{6}. \end{cases}$

12. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:
1) $\begin{cases} 1 < 3^{|x^2-x|} < 9 \\ 5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0 \\ 3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} \sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2 \\ x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < 1 \\ \log_2(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2)) < 1 \end{cases}$

1.4. FUNCŢII TRIGONOMETRICE INVERSE

Am studiat anul precedent funcţiile trigonometrice directe $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, împreună cu unele proprietăţi ale lor. Le vom reaminti pentru fiecare funcţie în parte, precizând şi domeniul lor de definiţie.

Funcţia sinus

Funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = 2\pi$. Acest fapt ne permite să reducem studiul unor proprietăţi la un interval de lungimea unei perioade principale, de exemplu $[0, 2\pi)$.
Dacă o proprietate are loc pe intervalul $(a, b) \subset [0, 2\pi)$, atunci submulţi-

mea lui $\mathbb{R}$ pe care această proprietate este adevărată se obţine adăugând la capetele intervalului (a, b) multiplu de 2π, adică $(a+2k\pi, b+2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Proprietăţi

Recomandăm ca proprietăţile **6-9** să fie prezentate utilizând graficul de la 5.

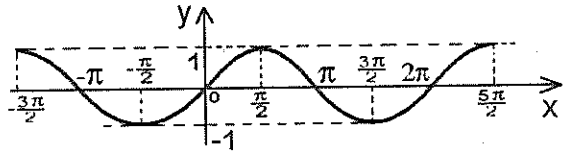
1. Funcţia $f(x) = \sin x$ ia cea mai mică valoare (-1) pentru $x_k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (în fapt se rezolvă ecuaţia trigonometrică fundamentală $\sin x = -1$).

2. Funcţia $f(x) = \sin x$ ia cea mai mare valoare 1 pentru $x_k = (-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (se rezolvă ecuaţia trigonometrică fundamentală $\sin x = 1$).

3. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $k \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

4. Funcţia $f(x) = \sin x$ este **impară**, adică $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

5. Graficul funcţiei $f(x) = \sin x$ este redat mai jos



Din $f(-x) = -f(x)$, graficul funcţiei este simetric în raport cu originea O a reperului cartezian.

6. Monotonia funcţiei $f(x) = \sin x$. Funcţia este strict crescătoare pe intervalele de forma $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ (a se vedea funcţii monotone din acest capitol).

7. Semnul funcţiei $f(x) = \sin x$. Dacă $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\sin x \geq 0$, iar dacă $x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\sin x \leq 0$.

8. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia $f(x) = \sin x$ este concavă pe intervalele $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ şi convexă pe intervalele $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

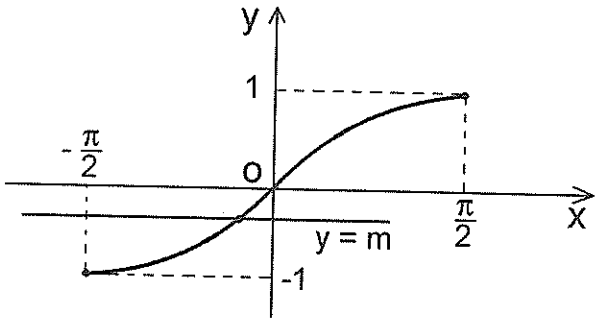
Punctele $x_k = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, în care concavitatea se schimbă cu convexitatea şi punctele $x'_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ în care convexitatea se schimbă cu concavitatea se numesc **puncte de inflexiune** pentru funcţie.

Dacă $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, atunci are loc inegalitatea lui Jensen

$$\sin(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2) \geq \tfrac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}.$$

9. Vom considera restricţia funcţiei f la intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu valori în $[-1, 1]$ pe care o notăm tot cu $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$.

Graficul acestei funcţii este cel de mai jos



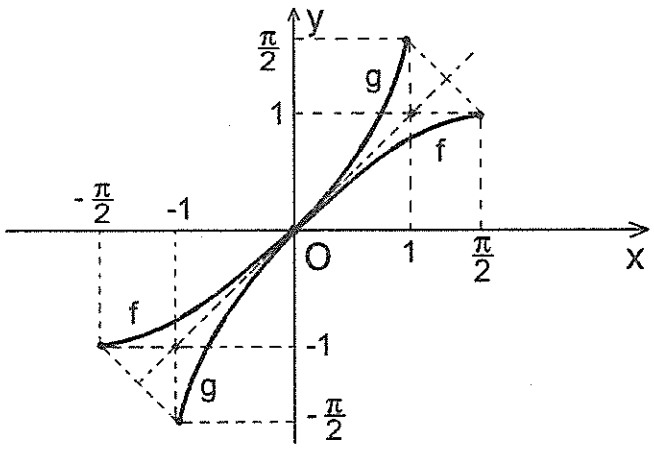
Observăm că orice paralelă $y = m \in [-1, 1]$ dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox taie graficul în exact un punct, ceea ce arată că funcţia considerată este bijectivă (Altfel acest fapt se poate deduce din aceea că funcţia este strict crescătoare pe $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ şi deci injectivă, iar din $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ se poate afirma că f este surjectivă).

Funcţia astfel definită fiind bijectivă este inversabilă. Inversa acestei funcţii este funcţia **arcsin**: $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definită prin $\arcsin y = x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât $\sin x = y$. Mai simplu spus dacă x şi y sunt două numere astfel încât $\sin x = y$ şi $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, atunci x se numeşte arcsinusul numărului y ($x = \arcsin y$).

Funcţia arcsin. Proprietăţi

Notăm funcţia inversă cu $g : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $g(x) = \arcsin x$. Recomandăm prezentarea proprietăţilor **6, 7, 8** utilizând graficul lui g.

1. Funcţia arcsin ia cea mai mică valoare $-\frac{\pi}{2}$ pentru $x = -1$ ($\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$).
2. Funcţia arcsin ia cea mai mare valoare $\frac{\pi}{2}$ pentru $x = 1$ ($\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$).
3. Funcţia arcsin nu este periodică.
4. Funcţia arcsin este impară. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.
5. Graficul funcţiei arcsin. Este simetricul graficului funcţiei directe $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, în raport cu prima bisectoare ($y = x$).



6. Monotonia funcţiei arcsin. Deoarece funcţia directă $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare rezultă că şi funcţia inversă este la fel.

7. Semnul functiei arcsin. Dacă $x \in [-1, 0]$, atunci $\arcsin x \leq 0$, iar pentru $x \in [0, 1]$, $\arcsin x \geq 0$.

8. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia arcsinus este convexă pe $[0, 1]$ şi concavă pe $[-1, 0]$; $x = 0$ este punct de inflexiune pentru funcţie.

9. Au loc egalităţile (pentru orice funcţie şi inversa ei):

1) $\sin(\arcsin x) = x$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$
2) $\arcsin(\sin x) = x$, $(\forall)\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Observaţie. Funcţia arcsinus reprezintă inversa funcţiei sinus restricţionată la $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu valori în $[-1, 1]$, unde această din urmă funcţie este bijectivă. Dar se constată că şi restricţia funcţiei sinus la $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ cu valori în $[-1, 1]$ este încă o funcţie bijectivă şi deci inversabilă. Să găsim inversa. Fie $y_0 \in [-1, 1]$. Deci există $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ astfel încât $\sin x_0 = y_0$. Luând $x_0 = \pi - \arcsin y_0$ se găseşte că $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, deoarece $\arcsin y_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Deci inversa funcţiei de mai sus este $f_1(x) = \pi - \arcsin x$. Noi însă vom lucra cu restricţia funcţiei sinus la $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cu valori în $[-1, 1]$.

În concluzie avem tabelele următoare care dau funcţia directă şi funcţia inversă

Funcţia	Domeniul de definiţie	Codomeniul	Funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$
$y = \sin x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$-1 \leq y \leq 1$	$x = \arcsin y$

Funcţia	Funcţia inversă	Domeniul de definiţie al funcţiei inverse	Codomeniul funcţiei inverse
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Probleme rezolvate

1. Determinaţi domeniul maxim de definiţie D pentru funcţia $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \arcsin \frac{1}{x+1}$.

R. Se impune condiţia $-1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$, $x \neq -1$. Găsim $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

2. Să se determine unghiul $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{3}{4}$.

R. Fie $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arcsin \frac{3}{4}$. Deci $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ şi $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{3}{4}$. Cum $\sin \alpha$, $\sin \beta > 0$ se poate restrânge intervalul în care se află unghiurile, adică $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Prin urmare $\gamma = \alpha + \beta \in (0, \pi)$. Să observăm că din $\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$ nu putem spune că $\gamma = \arcsin \frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$, deoarece nu ştim dacă $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Totuşi din $\sin \alpha = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ rezultă $\alpha < \frac{\pi}{6}$, iar din $\sin \beta = \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ se obţine $\beta < \frac{\pi}{3}$ şi deci $\alpha + \beta < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.
Prin urmare $\alpha + \beta = \arcsin \frac{\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{12}$.

3. Să se calculeze $\arcsin(\sin 10)$.

R. Fie $\alpha = \arcsin(\sin 10)$. De aici $\sin \alpha = \sin 10$ şi $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se observă că $10 \in [3\pi, 4\pi]$. Punctele α şi 10 sunt simetrice faţă de $\frac{3\pi}{2}$. Deci $10 - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. De aici $\alpha = 3\pi - 10$.

Funcţia cosinus

Funcţia $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = 2\pi$. Din acest motiv studiul proprietăţilor acestei funcţii se va reduce la un interval de lungime T_0, de exemplu $[0, 2\pi)$.

Proprietăţi

Recomandăm ca proprietăţile **6-9** să fie prezentate utilizând graficul de la 5.

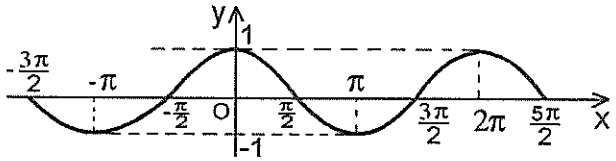
1. Funcţia $f(x) = \cos x$ ia cea mai mică valoare (-1) pentru $x_k = \pm\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (se rezolvă ecuaţia trigonometrică fundamentală $\cos x = -1$).

2. Funcţia $f(x) = \cos x$ ia cea mai mare valoare 1 pentru $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$, $(\forall)\,k\in\mathbb{Z}$.

4. Funcţia $f(x)=\cos x$ este **pară**, adică $f(-x)=f(x)$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$.

5. Graficul funcţiei $f(x)=\cos x$ este prezentat mai jos



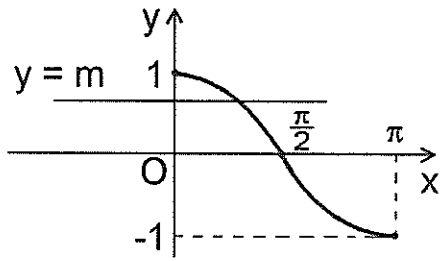
Din $f(-x)=f(x)$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$, graficul funcţiei este simetric în raport cu axa Oy.

6. Monotonia funcţiei $f(x)=\cos x$. Funcţia este strict crescătoare pe intervalele $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$ şi strict descrescătoare pe intervalele $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$.

7. Semnul funcţiei $f(x)=\cos x$. Dacă $x\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\cos x\geq 0$. iar dacă $x\in[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, atunci $\cos x\leq 0$.

8. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia $f(x)=\cos x$ este concavă pe intervalele $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$ şi este convexă pe intervalele $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$.
Punctele $-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru funcţie.

9. Vom considera restricţia funcţiei cosinus la intervalul $[0,\pi]$ cu valori în $[-1,1]$ pe care o notăm tot cu $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$.
Graficul acestei funcţii este redat mai jos:



Se vede că orice paralelă $y=m\in[-1,1]$ dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox intersectează graficul în exact un punct, ceea ce arată că funcţia considerată este bijectivă. Prin urmare această funcţie este inversabilă. Inversa acestei funcţii este funcţia:

$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$ definită prin

$\arccos y=x\in[0,\pi]$ astfel încât $\cos x=y$.

Mai simplu, dacă x, y sunt două numere astfel încât $\cos x=y$ şi $x\in[0,\pi]$, atunci x se numeşte arccosinusul numărului y ($x=\arccos y$).

Funcţia arccos. Proprietăţi.

Vom nota cu g funcţia inversă, $g:[-1,1]\to[0,\pi]$, $g(x)=\arccos x$.

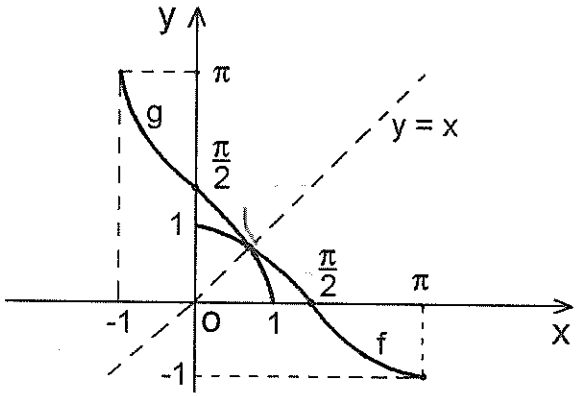
1. Funcţia arccos ia cea mai mică valoare 0 pentru $x=1$, deoarece $\arccos 1=0$.
2. Funcţia arccos ia cea mai mare valoare π pentru $x=-1$.
3. Funcţia arccos nu este periodică.
4. Funcţia arccos nu este nici pară, nici impară.

Are loc relaţia:

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ (\forall)\,x\in[-1,1].$$

Pentru demonstraţie fie $\alpha=\arccos(-x)$ şi $\beta=\pi-\arccos x$. De aici $\alpha\in[0,\pi]$ şi $\beta\in[0,\pi]$ ($\arccos x\in[0,\pi]$). Arătăm că avem $\cos\alpha=\cos\beta$, iar din injectivitatea funcţiei cosinus se deduce $\alpha=\beta$. Avem $\cos\alpha=\cos(\arccos(-x))=-x$ şi $\cos\beta=\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x$.

5. **Graficul funcţiei arccosinus.** Este simetricul graficului funcţiei directe $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ în raport cu prima bisectoare ($y=x$).



6. **Monotonia funcţiei arccosinus.** Cum funcţia directă $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ este strict descrescătoare pe $[0,\pi]$ rezultă că şi inversa g are aceeaşi proprietate pe $[-1,1]$.
7. **Semnul funcţiei arccosinus.** Dacă $x\in[-1,1]$, atunci $\arccos x\geq 0$.
8. **Convexitate şi concavitate.** Funcţia arccosinus este convexă pe $[-1,0]$ şi concavă pe $[0,1]$. Punctul $x=0$ este punct de inflexiune pentru funcţie.
9. Au loc egalităţile:

1) $\cos(\arccos x) = x$, $(\forall)\, x \in [-1, 1]$;
2) $\arccos(\cos x) = x$, $(\forall)\, x \in [0, \pi]$.

Tabelele de mai jos dau informaţii despre funcţia directă şi inversă.

Funcţia	Domeniul de definiţie	Codomeniul	Funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$
$y = \cos x$	$0 \le x \le \pi$	$-1 \le y \le 1$	$x = \arccos y$

Funcţia	Funcţia inversă	Domeniul de definiţie al funcţiei inverse	Codomeniul funcţiei inverse
$y = \cos x$	$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$

Probleme rezolvate

1. Determinaţi domeniul maxim D de definiţie pentru funcţia $g : D \to \mathbb{R}$, $g(x) = \arccos(2x - 1)$.
R. Funcţia g există dacă $-1 \le 2x - 1 \le 1$. Rezolvând această dublă inecuaţie se obţine $x \in [0, 1]$. Deci $D = [0, 1]$.

2. Să se calculeze: $\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{1}{3}$.
R. Notăm $\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \arccos \frac{1}{3}$. De aici $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ şi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$ şîi $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. De aici $\gamma = \alpha + \beta \in [0, \pi]$.
Avem: $\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$. De aici $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

3. Să se arate că

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ (\forall)\, x \in [-1, 1].$$

R. Fie $\alpha = \arcsin x$, $\beta = \arccos x$. De aici $\sin x = \alpha$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos \beta = x$, $\beta \in [0, \pi]$.
Scriem relaţia de demonstrat sub forma $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.
Cum unghiurile din cei doi membri sunt în $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, adică mulţimea pe care funcţia sinus este injectivă, este suficient să arătăm că $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$.
Avem $\sin \alpha = \sin(\arcsin x) = x$ şi $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos \beta = \cos(\arccos x) = x$.
Deci $\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ şi de aici $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, adică inegalitatea propusă.

4. Să se arate că dacă $x \in [0, 1]$, atunci $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.
R. Fie $\alpha = \arcsin x$. De aici $\sin \alpha = x \in [0, 1]$ şi $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Din $\alpha = \arccos \sqrt{1 - x^2}$ rezultă $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$ ceea ce-i adevărat din formula fundamentală $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

5. Să se calculeze $\arccos(\cos 5)$.
R. Fie $\alpha = \arccos(\cos 5)$. Deci $\cos \alpha = \cos 5$ şi $\alpha \in [0, \pi]$. Cum $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$ se alege $\alpha = 2\pi - 5$.

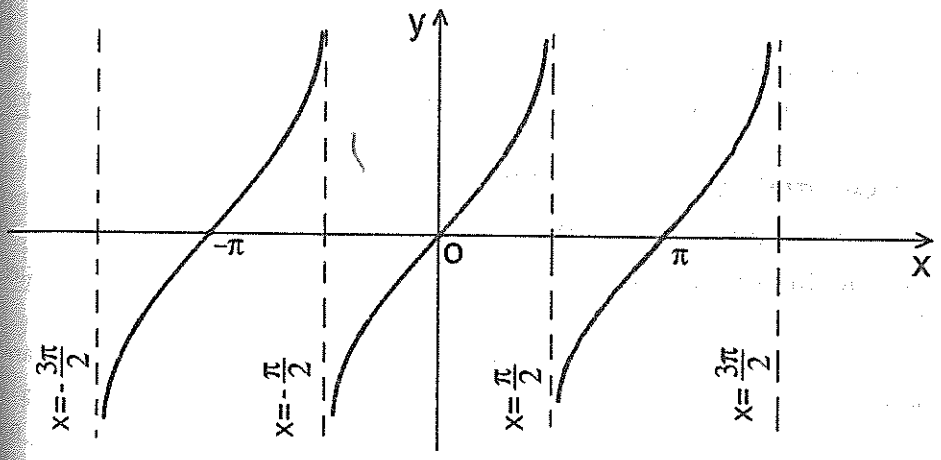
Funcţia tangentă

Funcţia $f : \mathbb{R} - \{(2k + 1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = \pi$. Prin urmare studiul acestei funcţii se realizează pe un interval de lungimea T_0. Acest interval este $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Proprietăţi

Recomandăm ca proprietăţile **5, 6, 7** să fie prezentate utilizând informaţiile oferite de graficul de la **4.**

1. Funcţia nu ia cea mai mică şi cea mai mare valoare.
2. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $(\forall)\, x \in D$, $(\forall)\, k \in \mathbb{Z}$, unde D este domeniul maxim de definiţie a funcţiei tangentă.
3. Funcţia tangentă este **impară**, adică $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\, x \in D$.
Într-adevăr $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.
4. Graficul funcţiei $f(x) = \operatorname{tg} x$ este redat mai jos.



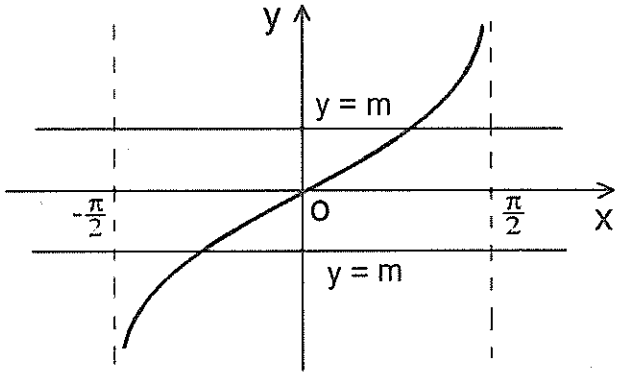
Din faptul că funcţia este impară se deduce simetria graficului în raport cu originea O a reperului cartezian.

5. **Monotonia funcţiei** $f(x) = \operatorname{tg} x$. Funcţia tangentă este strict crescătoare pe intervalele $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
6. **Semnul funcţiei** $f(x) = \operatorname{tg} x$. Dacă $x \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\operatorname{tg} x \ge 0$, iar pentru $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ avem $\operatorname{tg} x \le 0$.
7. **Convexitatea şi concavitatea.** Funcţia $f(x) = \operatorname{tg} x$ este concavă pe

intervalele $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ şi convexă pe intervalele $[k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Punctele $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru funcţie.

8. Considerăm restricţia lui f la intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cu valori în $\mathbb{R}$ pe care o notăm tot cu f.

Fie deci $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Graficul acestei funcţii este redat mai jos



Remarcăm că orice paralelă $y = m \in \mathbb{R}$ dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox taie graficul în exact un punct, ceea ce ne arată că această funcţie este bijectivă. Prin urmare este inversabilă. Inversa acestei funcţii este funcţia $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definitivă prin $\operatorname{arctg} y = x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $\operatorname{tg} x = y$.

Altfel spus dacă x, y sunt două numere reale astfel încât $\operatorname{tg} x = y$ şi $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, atunci x se numeşte arctangenta numărului y ($x = \operatorname{arctg} y$).

Funcţia arctg. Proprietăţi.

Notăm funcţia inversă cu $g : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

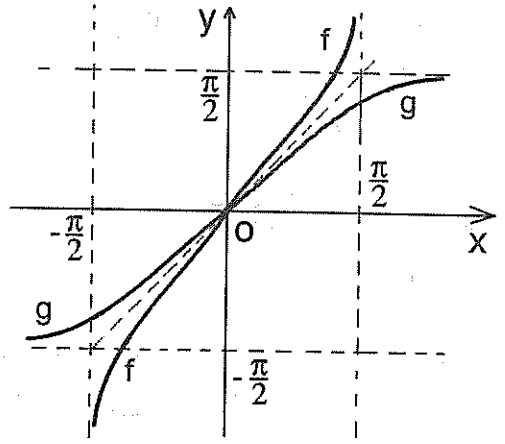
Recomandăm prezentarea proprietăţilor **5, 6, 7** utilizând graficul funcţiei g (**4**).

1. Funcţia arctg este mărginită, dar nu ia cea mai mică sau cea mai mare valoare.

2. Funcţia arctg este impară, deoarece $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr fie $\alpha = \operatorname{arctg}(-x)$, (1). Deci $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ şi $\operatorname{tg}\alpha = -x$. De aici $x = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha)$. Pentru $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ rezultă $\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\frac{\pi}{2}$ şi deci $-\alpha = \operatorname{arctg} x$, adică $\alpha = -\operatorname{arctg} x$, (2). Din (1) şi (2) rezultă relaţia dorită.

3. Funcţia arctg nu este periodică.

4. Graficul funcţiei arctg. Funcţia fiind impară are graficul simetric în raport cu O. El este simetricul graficului funcţiei directe $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ în raport cu prima bisectoare ($y = x$).



5. Monotonia funcţiei arctg. Funcţia este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

6. Semnul funcţiei arctg. Dacă $x \leq 0$, atunci $\operatorname{arctg} x \leq 0$, iar dacă $x > 0$, avem $\operatorname{arctg} x > 0$.

7. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi concavă pe $[0, \infty)$. Punctul $x = 0$ este punct de inflexiune pentru funcţie.

8. Au loc egalităţile:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$
2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $(\forall)\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

În concluzie avem tabelele următoare care dau funcţia directă şi funcţia inversă:

Funcţia	Domeniul de definiţie	Codomeniul	Funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$
$y = \operatorname{tg} x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$-\infty < y < \infty$	$x = \operatorname{arctg} y$

Funcţia	Funcţia inversă	Domeniul de definiţie al funcţiei inverse	Codomeniul funcţiei inverse
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Probleme rezolvate

1. Să se compare numerele $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

R. Am văzut că funcţia $g(x) = \operatorname{arctg} x$ este strict crescătoare. Din $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ rezultă $g(\frac{1}{3}) < g(\frac{1}{2})$, adică $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

2. Să se exprime $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ în funcţie de arcsin şi arccos.

R. Ni se cere să găsim $x \in [-1,1]$, pentru care $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \arcsin x$. Fie $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Deci $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$ şi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ (deoarece $\frac{1}{5} > 0$). Din $\alpha = \arcsin x$ rezultă $\sin\alpha = x$. Pentru a da o formă mai simplă lui x utilizăm formula $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. Cum $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ luăm semnul $+$ în faţa radicalului.

Deci $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{5})}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\frac{1}{5})}} = \frac{\frac{1}{5}}{\sqrt{1+\frac{1}{25}}} = \frac{\sqrt{26}}{26} = x$.

În final $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \arcsin\frac{\sqrt{26}}{26}$.

Analog determinăm $y \in [-1,1]$ pentru care $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \arccos y$.

Fie $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. De mai sus $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Din $\alpha = \arccos y$ rezultă $\cos\alpha = y$. Din formula $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ se obţine

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26} = y$. Aşadar $\operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \arccos\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Funcţia cotangentă

Funcţia $f : \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ este o funcţie periodică de perioadă principală $T_0 = \pi$. Studiul acestei funcţii se realizează pe un interval de lungime T_0. Acest interval este $(0, \pi)$.

Proprietăţi

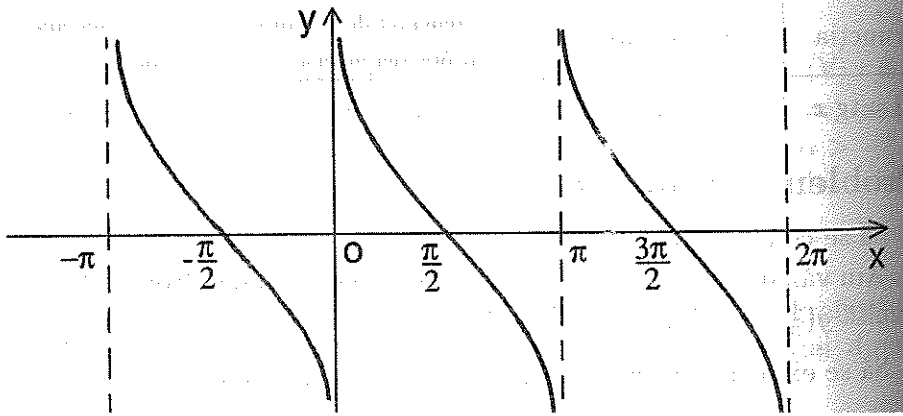
Aceeaşi recomandare, ca şi în cazul celorlalte funcţii, ca proprietăţile **5, 6, 7** să fie prezentate utilizând lectura graficului de la **4.**

1. Funcţia nu ia cea mai mare şi cea mai mică valoare.

2. $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg}(x+k\pi) = \operatorname{ctg} x$, $(\forall)\, x \in D$, $(\forall)\, k \in \mathbb{Z}$, unde D este domeniul maxim de definiţie a funcţiei cotangentă.

3. Funcţia cotangentă este **impară**, adică $f(-x) = -f(x)$, $(\forall)\, x \in D$, cum uşor se constată.

4. Graficul funcţiei $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este prezentat mai jos



Funcţia fiind impară are graficul simetric în raport cu O.

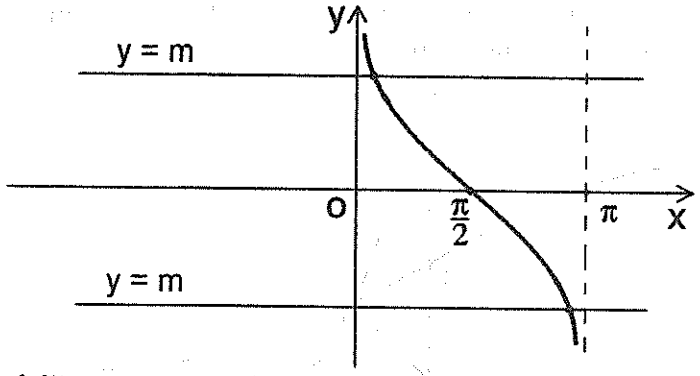
5. Monotonia funcţiei $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Funcţia cotangentă este strict descrescătoare pe intervalele $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Semnul funcţiei $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Dacă $x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\operatorname{ctg} x \geq 0$, iar pentru $x \in [\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci $\operatorname{ctg} x \leq 0$.

7. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia $f(x) = \operatorname{ctg} x$ este convexă pe intervalele $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ şi concavă pe intervalele $[\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru funcţie.

8. Considerăm restricţia lui f la intervalul $(0, \pi)$ cu valori în $\mathbb{R}$ pe care o vom nota tot cu f. Fie deci $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Graficul acestei funcţii este redat mai jos



Orice paralelă $y = m \in \mathbb{R}$ dusă printr-un punct al codomeniului la axa Ox taie graficul într-un singur punct, ceea ce ne arată că funcţia este bijectivă. Deci f este inversabilă. Inversa acestei funcţii este funcţia $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ definită prin $\operatorname{arcctg} y = x \in (0, \pi)$ astfel încît $\operatorname{ctg} x = y$.

Altfel spus dacă x, y sunt două numere reale astfel încât $\operatorname{ctg} x = y$ şi $x \in (0, \pi)$, atunci x se numeşte arccotangenta numărului y ($x = \operatorname{arcctg} y$).

9. Să observăm că avem relaţia

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},\ x \neq k\pi,\ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Funcţia arcctg. Proprietăţi.

Vom nota funcţia inversă cu $g : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $g(x) = \operatorname{arcctg} x$. Din nou, facem recomandarea de a prezenta proprietăţile **5, 6, 7** având suportul intuitiv dat de graficul lui g (4).

1. Funcţia arcctg este mărginită, dar nu ia cea mai mică sau cea mai mare valoare.

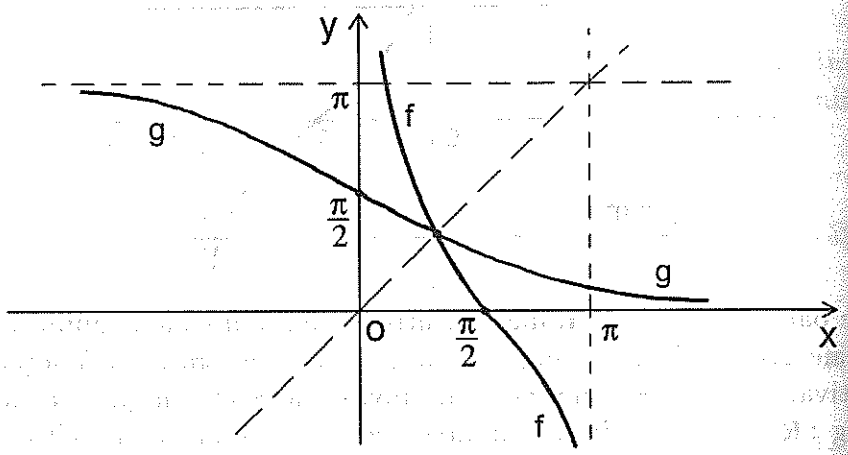
2. Funcţia arcctg nu este nici pară nici impară. Mai precis

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr fie $\alpha = \operatorname{arcctg} x$. Deci $\alpha \in (0, \pi)$ şi $\operatorname{ctg}\alpha = x$. Membrul drept este unghiul $\pi - \alpha \in (0, \pi)$. Cum şi membrul stâng este unghi în $(0, \pi)$ este suficient să arătăm că avem $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$, deoarece din injectivitatea funcţiei cotangentă rezultă egalitatea propusă. Avem $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$ şi $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x$.

3. Funcţia arcctg nu este periodică.

4. Graficul funcţiei arcctg se obţine prin simetria în raport cu prima bisectoare a graficului funcţiei directe



5. Monotonia funcţiei arcctg. Funcţia are aceeaşi monotonie ca şi funcţia directă. Deci este strict descrescătoare.

6. Semnul funcţiei arcctg. Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $\operatorname{arcctg} x > 0$.

7. Convexitatea şi concavitatea. Funcţia este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, \infty)$. Punctul $x = 0$ este punct de inflexiune pentru funcţie.

8. Au loc egalităţile:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$;

2) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ (\forall)\, x \in (0, \pi)$

În concluzie prezentăm tabelele care dau funcţia directă şi funcţia inversă

Funcţia	Domeniul de definiţie	Codomeniul	Funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$
$y = \operatorname{ctg} x$	$0 < x < \pi$	$-\infty < y < \infty$	$x = \operatorname{arcctg} y$

Funcţia	Funcţia inversă	Domeniul de definiţie al funcţiei inverse	Codomeniul funcţiei inverse
$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Probleme rezolvate

1. Să se exprime $\operatorname{arcctg} 3$ în funcţie de arcsin, arccos, arctg.

R. Trebuie să determinăm $x \in [-1, 1]$ pentru care $\operatorname{arcctg} 3 = \arcsin x$.

Dacă $\alpha = \operatorname{arcctg} 3$, atunci $\operatorname{ctg}\alpha = 3$ şi $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Din $\alpha = \arcsin x$ rezultă $\sin\alpha = x$. Se exprimă $\sin\alpha$ în funcţie de $\operatorname{ctg}\alpha$.

Avem: $\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$. Cum $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ rezultă $\sin\alpha > 0$ şi deci în faţa radicalului luăm semnul plus.

Deci $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Aşadar $x = \frac{\sqrt{10}}{10}$ şi $\operatorname{arcctg} 3 = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Să găsim acum $y \in [-1, 1]$ pentru care $\operatorname{arcctg} 3 = \arccos y$.

Ca mai sus $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, iar din $\alpha = \arccos y$ avem: $\cos\alpha = y$, $\cos\alpha > 0$. Exprimăm $\cos\alpha$ în funcţie de $\operatorname{ctg}\alpha$ şi avem:

$$y = \cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Aşadar $\operatorname{arcctg} 3 = \arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Altfel. Notăm $\operatorname{arcctg} 3 = \arcsin x$ şi aplicăm funcţia ctg.

În fine să determinăm $z \in \mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{arcctg} 3 = \operatorname{arctg} z$.

Ca mai sus $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, iar din $\operatorname{tg}\alpha = z$ avem $z = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{3}$. Deci $\operatorname{arcctg} 3 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

2. Să se arate că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \tfrac{\pi}{2},\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$

R. Scriem egalitatea sub forma $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$ şi notăm $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arcctg} x$.

De aici $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ şi $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\beta \in (0, \pi)$ şi $\operatorname{ctg}\beta = x$.

Membrul drept este unghiul $\frac{\pi}{2} - \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Deci cei doi membri sunt unghiuri în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Arătăm că $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta)$. De aici (funcţia tg este injectivă) va rezulta relaţia de demonstrat.

Avem $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ şi $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta) = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

Probleme propuse

1. Determinaţi domeniul maxim de definiţie D pentru funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ în cazurile:
1) $f(x) = \arcsin 2x$; 2) $f(x) = \arcsin \frac{x}{x+1}$; 3) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;
4) $f(x) = \arccos(1-2x)$; 5) $f(x) = \arccos \frac{x}{2x+1}$; 6) $f(x) = \arccos \frac{x-1}{x+1}$.

2. Să se calculeze:
1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arcsin(-1)$; 3) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; 4) $\arcsin 0$; 5) $\arcsin \frac{1}{2}$;
6) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\arccos(-1)$; 8) $\arccos(-\frac{1}{2})$; 9) $\arccos 0$; 10) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
11) $\arccos 1$; 12) $\sin(2\arcsin \frac{1}{3})$; 13) $\cos(2\arcsin \frac{1}{3})$; 14) $\operatorname{tg}(2\arcsin \frac{1}{3})$;
15) $\sin(\frac{1}{2}\arccos \frac{1}{9})$; 16) $\sin(3\arcsin \frac{1}{3})$; 17) $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$;
18) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$; 19) $\sin(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3)$; 20) $\cos(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3)$;
21) $\operatorname{arctg}(-1)$; 22) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 23) $\operatorname{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

3. Să se calculeze:
1) $\arcsin \frac{1}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\arcsin(-\frac{1}{3}) + \arcsin \frac{2}{3}$;
3) $\arcsin(\frac{1}{9}) + \arcsin(\frac{2}{9})$; 4) $\arcsin \frac{2}{3} - \arccos(-\frac{2}{3})$;
5) $\arccos \frac{1}{7} + \arccos(-\frac{1}{7})$; 6) $\sin(2\arcsin \frac{1}{5})$;
7) $\cos(\arcsin \frac{1}{3} + \arccos \frac{2}{3})$; 8) $\sin(\arccos \frac{2}{3} + \arccos \frac{1}{3})$;
9) $\cos(\arccos \frac{5}{13} - \arcsin \frac{3}{5})$; 10) $\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 5$;
11) $\cos(\arccos x + \arccos y)$; 12) $\sin(\arccos x + \arcsin y)$;
13) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$; 14) $\sin(2\arcsin x)$; 15) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$;
16) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$; 17) $\sin(2\operatorname{arctg} x)$; 20) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$.

4. Să se arate că:
1) $\arcsin(\sin(-5)) = 2\pi - 5$; 2) $\arccos(\cos 9) = 9 - 2\pi$;
3) $2\arcsin \frac{2}{7} = \arccos \frac{41}{49}$; 4) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$;
5) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$; 6) $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$;
7) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; 8) $\operatorname{arctg} 3 - \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi}{4}$;
9) $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2})$;
10) $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x)$, $x \in [-1, 1]$;
11) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, $x \in [0, 1]$;
12) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 13) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
14) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x > 0$.

5. Să se arate că:
1) $\arcsin \frac{2}{5} < \arcsin \frac{3}{7}$; 2) $\arccos \frac{3}{7} < \arccos \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{2}{9} \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$;
4) $\operatorname{arcctg}(3\sqrt{2}) < \operatorname{arcctg} 4$; 5) $\arccos(-\frac{2}{3}) < \arccos(-\frac{5}{6})$;
6) $\arccos(-\frac{2}{3}) > \frac{3}{2} + \arcsin \frac{2}{3}$;

6. Exprimaţi: a) $\arcsin \frac{3}{5}$; b) $\arccos \frac{12}{13}$; c) $\operatorname{arctg} \frac{5}{12}$; d) $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4}$ în termeni de toate funcţiile trigonometrice inverse (De exemplu $\arcsin \frac{3}{5} = \arccos y$, $\arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arctg} z$; $\arcsin \frac{3}{5} = \operatorname{arcctg} t$).

7. Dacă $x, y \in [0, 1]$, atunci arătaţi că
1) $\arcsin x + \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy)$;
2) $\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$;
3) $\arcsin x - \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2})$;
4) $\arccos x - \arccos y = \arcsin(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2})$;
5) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{1-xy}{x+y}$, $x, y > 0$;
6) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$, $x, y > 0$.

8. Arătaţi că:
1) $\sin \frac{2+\sqrt{3}}{2} > \frac{\sin 2 + \sin\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} > \frac{\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\frac{\sqrt{2}}{3}}{2}$;
3) $\operatorname{tg}(\frac{1+\sqrt{3}}{4}) < \frac{\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{tg}\frac{1}{2}}{2}$; 4)* $\sin(\cos \frac{\sqrt{5}}{3}) < \cos(\sin \frac{\sqrt{5}}{3})$;
5)* $\sin(\sin\sqrt{2}) < \cos(\cos\sqrt{2})$; 6)* $(1 + \frac{1}{\sin\sqrt{2}})(1 + \frac{1}{\cos\sqrt{2}}) > 3 + 2\sqrt{2}$;
7)* $\frac{\sin(1+\sqrt{2})}{\sin 1 \cdot \sin\sqrt{2}} > \frac{2}{\sin\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

1.5. ECUAŢII TRIGONOMETRICE

Chestiuni teoretice

Definiţie. Prin **ecuaţia trigonometrică** se înţelege o ecuaţie în care necunoscuta figurează în argumentul funcţiilor sin, cos, tg şi ctg (sau a unora din aceste funcţii).

Exemple. 1) $\sin 2x + \cos x = 1$; 2) $\operatorname{tg} 2x + \sin x + \cos x = -3$;
3) $\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$; 4) $\frac{1}{\sin x} + 2\cos x - 5 = 0$;
5) $\sqrt{1 + \sin x} - \operatorname{tg} x = 1 + 3\sin x$.

Definiţie. Spunem că $x = x_0$ este **soluţie** a ecuaţiei trigonometrice dacă înlocuind în ecuaţia dată pe x cu x_0 se obţine o egalitate.

A rezolva o ecuaţie trigonometrică înseamnă a-i determina toate soluţiile. Rezolvarea unei ecuaţii trigonometrice comportă transformarea acesteia şi înlocuirea ei cu altă ecuaţie, care poate avea şi alte soluţii sau

care poate avea mai puţine soluţii decât cea iniţială.
Ecuaţia dată este corect rezolvată dacă în urma transformărilor, de fiecare dată se obţine o ecuaţie ce are aceleaşi rădăcini ca şi ecuaţia precedentă, adică orice două astfel de ecuaţii sunt echivalente (nu se pierd soluţii, nu apar în plus rădăcini "străine").
Dacă toate ecuaţiile astfel obţinute sunt echivalente, atunci soluţiile ultimei ecuaţii (care de obicei este o reuniune de ecuaţii trigonometrice fundamentale) sunt soluţiile ecuaţiei date.

Transformări neechivalente ale ecuaţiilor trigonometrice

Uneori ecuaţiile trigonometrice nu le rezolvăm folosind transformările echivalente. În astfel de situaţii **se pot pierde soluţii ale ecuaţiei date sau să apară aşa numitele rădăcini străine (o rădăcină străină** este o rădăcină a ecuaţiei finale, care nu este soluţie a ecuaţiei iniţiale).
Prezentăm în continuare câteva tehnici de rezolvare a ecuaţiilor, care conduc la pierderea unor soluţii sau la apariţia de soluţii străine.
În general există trei modalităţi care fac ca două ecuaţii să nu fie echivalente:
1) Transformări ce conţin formule trigonometrice:

a) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; b) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; c) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$;

d) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$; e) $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; f) $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;

g) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$.

Dacă utilizăm egalităţile de la dreapta la stânga, aceste egalităţi conduc la o extensie a domeniului de definiţie a ecuaţiei şi din această cauză pot apărea rădăcini străine ale ecuaţiei. Dacă folosim de la stânga la dreapta aceste egalităţi se ajunge la o restrângere a domeniului de definiţie a ecuaţiei şi deci la pierderea unor soluţii. Mai precis pentru formulele de la a) membrul stâng este definit pentru toate valorile x, y pentru care $x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, în timp ce membrul drept pentru $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \pm y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În formula b) membrul stâng este definit pentru orice $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, iar membrul drept pentru orice $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, etc.
2) Extinderea domeniului de definiţie a ecuaţiei ca rezultat al unor transformări (eliminarea numitorilor, simplificarea unei fracţii, etc.).
3) Ridicarea ambilor membri ai ecuaţiei la o putere pară.

Se ştie că pentru $a, b \in \mathbb{R}$, egalitatea $a = b$ nu este echivalentă cu $a^{2n} = b^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a = b$, atunci $a^{2n} = b^{2n}$, iar din $a^{2n} = b^{2n}$, rezultă $a = \pm b$. Cele două egalităţi sunt echivalente dacă $a, b > 0$ sau dacă $a, b < 0$, altfel spus dacă $ab > 0$. Vom prezenta pe parcurs ecuaţii care să ilustreze aceste situaţii.

Vom încerca, în continuare, să prezentăm principalele tipuri de ecuaţii trigonometrice înţelegând că rezolvarea inecuaţiilor trigonometrice decurge mai uşor aplicând aceeaşi tehnică utilizată la inecuaţii exponenţiale şi logaritmice.
Anul trecut s-au studiat ecuaţiile trigonometrice fundamentale. Tabelul de mai jos prezintă aceste ecuaţii împreună cu soluţiile lor.

Ecuaţia	Mulţimea de soluţii
$\sin x = a$, unde $\lvert a\rvert \leq 1$	$S = \{(-1)^k \arcsin a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\cos x = a$, unde $\lvert a\rvert \leq 1$	$S = \{\pm \arccos a + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$	$S = \{\operatorname{arctg} a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$	$S = \{\operatorname{arcctg} a + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

1. Ecuaţii trigonometrice de forma
$\sin ax = \sin bx$, $\cos ax = \cos bx$.

Prima metodă de rezolvare. Dacă punem $c = \sin bx$ ($c = \cos bx$), atunci $c \in [-1, 1]$ şi ştim că ecuaţia $\sin ax = c$ ($\cos ax = c$) are soluţiile date de

$ax = (-1)^k \arcsin c + k\pi$ ($ax = \pm \arccos c + 2k\pi$), $k \in \mathbb{Z}$ sau
$ax = (-1)^k bx + k\pi$ ($ax = \pm bx + 2k\pi$), $k \in \mathbb{Z}$.

Se analizează cazurile: 1°) $k = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ (deci k par) când
$ax = (-1)^{2p} bx + 2p\pi$ sau $ax = bx + 2p\pi$ când $x \in S_1$.
2°) $k = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$ (deci p impar) când $ax = -bx + (2p+1)\pi$ şi $x \in S_2$.
Acum mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este $x \in S_1 \cup S_2$.
Pentru ecuaţia care conţine cosinusuri se rezolvă ecuaţiile $ax = bx + 2k\pi$, cu soluţiile $x \in S_1'$ şi $ax = -bx + 2k\pi$ având soluţiile $x \in S_2'$.
Mulţimea de soluţii pentru ecuaţia $\cos ax = \cos bx$ este $x \in S_1' \cup S_2'$.

A doua metodă de rezolvare. Se scriu ecuaţiile echivalent
$\sin ax - \sin bx = 0$, $\cos ax - \cos bx = 0$
şi se transformă diferenţele în produse
$2\sin(\frac{(a-b)x}{2})\cos(\frac{(a+b)x}{2}) = 0$, $2\sin(\frac{(a-b)x}{2})\sin(\frac{(a+b)x}{2}) = 0$.
Fiecare din ecuaţii este echivalentă cu reuniunea a două ecuaţii
$(\sin(\frac{(a-b)x}{2}) = 0$ sau $\cos(\frac{(a+b)x}{2}) = 0)$,

$(\sin(\frac{(a-b)x}{2}) = 0$ sau $\sin(\frac{(a+b)x}{2}) = 0)$.

Reuniunea soluţiilor primelor două ecuaţii dau soluţia pentru ecuaţia $\sin ax = \sin bx$, iar reuniunea soluţiilor ultimelor două ecuaţii dau soluţia pentru $\cos ax = \cos bx$.

Observaţii. 1) Se demonstrează că mulţimile de soluţii obţinute prin cele două metode sunt egale.

2) Dacă ecuaţia este $\sin ax = -\sin bx$ $(\cos ax = -\cos bx)$, atunci ea este echivalentă cu $\sin ax = \sin(-bx)$ $(\cos ax = \cos(\pi - bx))$.

3) Dacă avem de rezolvat ecuaţia $\sin ax = \cos bx$, atunci o scriem sub forma $\sin ax = \sin(\frac{\pi}{2} - bx)$.

4) Dacă avem ecuaţiile $\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx$ $(\operatorname{ctg} ax = \operatorname{ctg} bx)$, atunci se impun condiţiile de existenţă pentru $\operatorname{tg} ax$, $\operatorname{tg} bx$ $(\operatorname{ctg} ax$, $\operatorname{ctg} bx)$: $\cos ax \neq 0$, $\cos bx \neq 0$ $(\sin ax \neq 0$, $\sin bx \neq 0)$.

Din $\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx$ $(\operatorname{ctg} ax = \operatorname{ctg} bx)$ rezultă $ax = bx + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi $x \in S$.

Vor fi soluţii acele valori $x \in S$ pentru care $\cos ax \neq 0$, $\cos bx \neq 0$ $(\sin ax \neq 0$, $\sin bx \neq 0)$.

Altfel se scrie ecuaţia sub forma $(\cos ax \neq 0$, $\cos bx \neq 0)$

$\frac{\sin ax}{\cos ax} - \frac{\sin bx}{\cos bx} = 0$ sau $\frac{\sin(ax-bx)}{\cos ax \cos bx} = 0$ sau $\sin(a-b)x = 0$.

Soluţiile ultimei ecuaţii sunt soluţii pentru ecuaţia dată dacă $\cos ax \neq 0$, $\cos bx \neq 0$.

Analog se procedează cu ecuaţia $\operatorname{ctg} ax = \operatorname{ctg} bx$.

Ecuaţia $\operatorname{tg} ax = -\operatorname{tg} bx$ se scrie ca $\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg}(-bx)$, iar ecuaţia $\operatorname{tg} ax = \operatorname{ctg} bx$ o scriem sau sub forma $\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - bx)$ sau sub forma $\frac{\sin ax}{\cos ax} - \frac{\cos bx}{\sin bx} = 0$, etc.

Aceste discuţii le rezumăm în tabelul

Ecuaţia	Formula de rezolvare
$\sin ax = \sin bx$	$ax = (-1)^k bx + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos ax = \cos bx$	$ax = \pm bx + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx$ $\cos ax \neq 0,\ \cos bx \neq 0$	$ax = bx + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} ax = \operatorname{ctg} bx$ $\sin ax \neq 0,\ \sin bx \neq 0$	$ax = bx + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

1) $\sin 3x = \sin x$; 2) $\cos 5x = \cos 7x$; 3) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$;

4) $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

R. **1) Metoda 1.** Avem egalitatea de argumente

$3x = (-1)^k x + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, (1)

Cazul 1°. $k = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ şi (1) devine $3x = x + 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$. De aici $x = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ sau scriem $x \in \{p\pi;\ p \in \mathbb{Z}\} = S_1$.

Cazul 2°. $k = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$ şi (1) se scrie $3x = -x + (2p+1)\pi$, adică $x = \frac{(2p+1)\pi}{4}$, $p \in \mathbb{Z}$ sau încă $x \in \{\frac{(2p+1)\pi}{4};\ p \in \mathbb{Z}\} = S_2$.

Deci mulţimea de soluţii a ecuaţiei este $S = S_1 \cup S_2$.

Metoda 2. Se scrie echivalent ecuaţia astfel:

$\sin 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\sin x = 0$ sau $\cos 2x = 0)$.

Ecuaţia $\sin x = 0$ are mulţimea de soluţii $S_1' = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, iar ecuaţia $\cos 2x = 0$ are mulţimea de soluţii $x \in \{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = S_2'$.

În final $S = S_1' \cup S_2'$. Se arată uşor că $S_2 = S_2'$.

2) Avem egalităţile de argumente: $7x = \pm 5x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De aici se rezolvă ecuaţiile:

1°) $7x = 5x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, adică $x \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = S_1$;

2°) $7x = -5x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, când $x \in \{\frac{k\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}\} = S_2$.

Se vede că $S_1 \subset S_2$ (altfel spus soluţiile din S_1 sunt printre soluţiile din S_2 pentru $k = 6p$, $p \in \mathbb{Z}$). Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este $S = S_1 \cup S_2 = S_2$.

3) Se impun condiţiile $\cos 2x \neq 0$, $\cos x \neq 0$ şi se aduce ecuaţia la forma $2x = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De aici $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verificarea soluţiilor. Trebuie să arătăm că avem $\cos k\pi \neq 0$ şi $\cos 2k\pi \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Este imediat că avem $\cos k\pi = 1$ (-1) dacă k este par (k este impar) şi deci $\cos k\pi \neq 0$. Ambele cerinţe $\cos k\pi \neq 0$, $\cos 2k\pi \neq 0$ fiind verificate rezultă că $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt soluţiile ecuaţiei date.

4) Se impun condiţiile $\sin 2x \neq 0$, $\sin x \neq 0$ sau cum $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ atunci cerem $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

Din ecuaţie rezultă $2x = x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verificarea soluţiilor. Cum $\sin k\pi = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ rezultă că ecuaţia dată nu are soluţii.

2. Ecuaţii de forma

$f(\sin x) = 0$, $f(\cos x) = 0$, $f(\operatorname{tg} x) = 0$, $f(\operatorname{ctg} x) = 0$.

Metodă de rezolvare. Ecuaţiile de tipul anunţat mai sus în care f este o funcţie polinomială de argument indicat se rezolvă ca ecuaţii algebrice în y după ce în prealabil s-a notat $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Cu valorile y obţinute din rezolvarea ecuaţiei algebrice se revine la substituţie şi se rezolvă ecuaţii trigonometrice fundamentale.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; b) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2(\frac{x}{2})$;

c) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.

R. a) Notăm $\sin x = y$ şi rezolvăm ecuaţia $2y^2 - 3y + 1 = 0$. Găsim soluţiile $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 1$. Revenim la substituţie şi rezolvăm ecuaţiile trigonometrice fundamentale: $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = 1$. Prima ecuaţie are soluţiile $x \in \{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = S_1$, iar a doua ecuaţie are soluţiile $x \in \{(-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = S_2$.

În final ecuaţia dată are mulţimea de soluţii $S = S_1 \cup S_2$.

b) Se exprimă $\cos 2x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$ în funcţie de $\cos x$ utilizând formulele:

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2}$ şi ecuaţia devine

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x = 2(1+\cos x)$ sau notând $\cos x = y$, $2y^2 - 5y - 3 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{2}$. Revenind la substituţii avem de rezolvat ecuaţiile: $\cos x = 3$, $\cos x = -\frac{1}{2}$. Prima ecuaţie nu are soluţii, iar a doua dă soluţiile: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deci mulţimea de soluţii a ecuaţiei este $S = \{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Se impune condiţia $\cos x \neq 0$. Se notează $\operatorname{tg} x = y$ şi ecuaţia $y^2 - 3y + 2 = 0$ are soluţiile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Ecuaţiile $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = 2$ dau soluţiile $S_1 = \{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi respectiv $S_2 = \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ambele mulţimi de soluţii verifică cerinţa $\cos x \neq 0$.

Deci, mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este $S = S_1 \cup S_2$.

3. Ecuaţii omogene în $\sin f(x)$ şi $\cos f(x)$.

Metodă de rezolvare. Ecuaţia omogenă de grad n în $\sin f(x)$ şi $\cos f(x)$ are forma generală:

$a_n \sin^n f(x) + a_{n-1}\sin^{n-1} f(x)\cos f(x) + a_{n-2}\sin^{n-2} f(x)\cos^2 f(x) + \cdots + a_0 \cos^n f(x) = 0$.

Să observăm că fiecare termen al ecuaţiei are acelaşi grad n în $\sin f(x)$, $\cos f(x)$. Dacă $\cos f(x) \neq 0$ se împarte ecuaţia prin $\cos^n f(x)$ obţinând ecuaţia de grad n în $\operatorname{tg} f(x) = y$, $a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, care are în general cel mult n soluţii reale y_i, $i = \overline{1,n}$. Se rezolvă ecuaţiile $\operatorname{tg} f(x) = y_i$ şi se face reuniunea soluţiilor la care se mai adaugă soluţiile ecuaţiei $\cos f(x) = 0$, dacă acestea verifică ecuaţia dată.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$; b) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = 0$;

c) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

R. a) Să observăm că dacă $\cos^2 x = 0$, atunci din ecuaţie rezultă $\sin x = 0$, fals (deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Deci se poate împărţi ecuaţia prin $\cos^2 x$ (fără a pierde soluţii) şi se obţine ecuaţia echivalentă $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$ cu soluţiile $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 3$. Deci ecuaţia dată este echivalentă cu reuniunea soluţiilor acestor două ecuaţii. Prima ecuaţie are soluţiile $S_1 = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, iar a doua ecuaţie are ca mulţime de soluţii $S_2 = \{\operatorname{arctg} 3 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Ecuaţia dată are mulţimea de soluţii $S = S_1 \cup S_2$.

b) Dacă aici s-ar împărţi direct prin $\cos^2 x$ s-ar pierde soluţiile date de $\cos x = 0$. Într-adevăr dacă înlocuim în ecuaţia $\cos x = 0$ se obţine egalitate. Mai practic este să scriem echivalent ecuaţia sub forma $\cos x(\cos x - 3\sin x) = 0$. Această ecuaţie este echivalentă cu reuniunea ecuaţiilor $\cos x = 0$, $\cos x - 3\sin x = 0$, care au mulţimile de soluţii $S_1 = \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi respectiv $(\operatorname{tg} x = \frac{1}{3})$ $S_2 = \{\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

În final mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $S = S_1 \cup S_2$.

c) Membrul stâng este omogen de gradul doi în $\sin x$ şi $\cos x$. Omogenizăm şi membrul drept dacă-l scriem sub forma: $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$. După calcule ecuaţia se aduce la forma $4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Se împarte prin $\cos^2 x$ $(\neq 0)$ şi etc.

Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $\{-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\operatorname{arctg}(\frac{3}{4}) + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

O astfel de ecuaţie se numeşte de obicei "ecuaţie aproape omogenă".

4. Ecuaţia liniară în $\sin f(x)$ şi $\cos f(x)$

Are forma generală: $a\sin f(x) + b\cos f(x) = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Vom indica mai multe metode de rezolvare.

Metoda 1 (a unghiului auxiliar). Dacă unul din numerele $a, b \in \mathbb{R}$ este nenul se împarte ecuaţia prin acest număr. Fie acesta a. Ecuaţia devine $\sin f(x) + \frac{b}{a}\cos f(x) = \frac{c}{a}$. Ştim că funcţia tangentă restricţionată la $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cu valori reale este surjectivă. Cum $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$ se deduce că există $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Ecuaţia devine

$\sin f(x) + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos f(x) = \frac{c}{a}$ sau $\sin f(x)\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos f(x) = \frac{c}{a}\cos\alpha$ sau în fine $\sin(f(x) + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$, ecuaţie care are soluţii dacă $\frac{c}{a}\cos\alpha \in [-1, 1]$.

Metoda 2. (Substituţia universală). Utilizăm formulele cunoscute $\sin f(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos f(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg}(\frac{f(x)}{2})$ şi se obţine o ecuaţie de gradul doi în t,
care în general are cel mult două soluţii reale t_1, t_2. Se revine la substituţie şi se rezolvă ecuaţiile $\operatorname{tg}(\frac{f(x)}{2}) = t_i$, $i = 1, 2$, (1).
Prin substituţia universală am văzut că se restrânge domeniul de definiţie cu acele valori x pentru care $\frac{f(x)}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (2). Aceste valori se verifică direct în ecuaţia dată. Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este formată din reuniunea soluţiilor din (1) şi eventualele valori din (2) care verifică ecuaţia.

Metoda 3. Prin această metodă vom vedea că se introduc rădăcini străine. Ea constă în a izola într-un membru unul din termenii $a\sin f(x)$, $b\cos f(x)$ şi a ridica ambii membri ai ecuaţiei la pătrat. Se obţine o ecuaţie de gradul doi în $\sin f(x)$ sau $\cos f(x)$. Valorile x găsite trebuie să fie verificate în ecuaţie.

Metoda 4. Se poate gândi ecuaţia liniară ca o ecuaţie omogenă de gradul doi în $\sin(\frac{f(x)}{2})$, $\cos(\frac{f(x)}{2})$ dacă o scriem sub forma:
$2a\sin(\frac{f(x)}{2})\cos(\frac{f(x)}{2}) + b[\cos^2(\frac{f(x)}{2}) - \sin^2(\frac{f(x)}{2})] = c[\sin^2(\frac{f(x)}{2}) + \cos^2(\frac{f(x)}{2})]$, etc.

Observaţie. Metoda 1 şi metoda 4 lucrează cu ecuaţii echivalente. Celelalte metode impun verificări de soluţii.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia $\sin x + 7\cos x = 5$.

R. Metoda 1. (Metoda unghiului auxiliar). Există $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încît $\operatorname{tg}\alpha = 7$. Se aduce ecuaţia la forma $\sin(x+\alpha) = 5\cos\alpha$. Cum $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{50}}$ şi ecuaţia devine: $\sin(x+\alpha) = \frac{5}{\sqrt{50}}$. De aici $x + \alpha = (-1)^k \arcsin(\frac{5}{\sqrt{50}}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x = -\operatorname{arctg} 7 + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Metoda 2. (Substituţia universală) Punem $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$ şi ecuaţia devine $\frac{2y}{1+y^2} + \frac{7(1-y^2)}{1+y^2} = 5$ cu soluţiile $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$. Se rezolvă ecuaţiile $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ şi $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$ când se obţin mulţimile de soluţii $S_1 = \{2\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi respectiv $S_2 = \{2\operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. La această metodă trebuie văzut dacă valorile $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sunt soluţii ale ecuaţiei iniţiale prin înlocuire directă în ecuaţie. Avem: $\sin(\pi + 2k\pi) + 7\cos(\pi + 2k\pi) = 5$ sau $0 - 7 = 5$, fals. Deci $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nu sunt soluţii ale ecuaţiei date.
Ecuaţia dată are mulţimea de soluţii: $S = S_1 \cup S_2$.

Metoda 3. Scriem ecuaţia sub forma $\sin x = 5 - 7\cos x$ şi se ridică la pătrat rezultând ecuaţia $50\cos^2 x - 70\cos x + 24 = 0$. Se notează $\cos x = y$ şi obţinem pentru ecuaţia în y soluţiile $y_1 = \frac{3}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$. Ecuaţiile $\cos x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ au mulţimile de soluţii
$S_1 = \{\pm\arccos(\frac{3}{5}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi respectiv $S_2 = \{\pm\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Trebuie să verificăm dacă soluţiile găsite sunt şi soluţii ale ecuaţiei date.
Verificarea soluţiilor din S_1. Avem:
$\sin[\pm\arccos(\frac{3}{5}) + 2k\pi] + 7\cos[\pm\arccos(\frac{3}{5}) + 2k\pi] = 5$ sau
$\sin[\pm\arccos(\frac{3}{5})] + 7\cos[\pm\arccos(\frac{3}{5})] = 5$ sau $\pm\sin(\arccos(\frac{3}{5})) +$
$7\cos(\arccos(\frac{3}{5})) = 5$ sau $\pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + 7(\frac{3}{5}) = 5$.
Avem de analizat cele două posibilităţi după cum se ia în faţa radicalului semnul $+$ sau $-$.
Deci $\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \frac{21}{5} = 5$ sau $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$, care este adevărată.
Aceasta arată că $x \in \{\arccos(\frac{3}{5}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = S_1'$ reprezintă soluţii ale ecuaţiei date.
Pentru celălalt caz avem: $-\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \frac{21}{5} = 5$ sau $-\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$ este fals.
Deci $x = -\arccos(\frac{3}{5}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nu este soluţie a ecuaţiei date.
Verificarea soluţiilor din S_2. Se procedează ca mai sus şi se arată că numai $x = -\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ este soluţie a ecuaţiei date. Fie $S_2' = \{-\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $S = S_1' \cup S_2'$.

Metoda 4. Gândim ecuaţia dată ca o ecuaţie omogenă în $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$ şi avem:
$2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) + 7[\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})] = 5[\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})]$ sau
$\cos^2(\frac{x}{2}) - 6\sin^2(\frac{x}{2}) + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$. Cum $\cos(\frac{x}{2}) = 0$ înlocuit în ecuaţie dă $\sin(\frac{x}{2}) = 0$, fals, înseamnă că se poate împărţi ecuaţia prin $\cos^2(\frac{x}{2})$ şi rezultă ecuaţia $6\operatorname{tg}^2(\frac{x}{2}) - \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) - 1 = 0$ cu soluţiile $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{3}$.
Prima ecuaţie are mulţimea de soluţii $S_1 = \{2\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, iar a doua ecuaţie
$S_2 = \{2\operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Ecuaţia dată are mulţimea de soluţii $S = S_1 \cup S_2$.

5. Ecuaţii care conţin produse de sinusuri sau (şi) cosinusuri

Metodă de rezolvare. Tehnica de rezolvare a acestor ecuaţii constă în a transforma echivalent ecuaţia scriind produsele ca sume după formulele:

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$,

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$,

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$; b) $\cos 5x \cos x = \cos 6x \cos 2x$;

c) $\sin 4x \cos 2x = \sin 5x \cos x$.

R. a) Ecuaţia se transformă echivalent în ecuaţia:
$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$.
Ultima ecuaţie are mulţimea de soluţii $S = \{\frac{2k\pi}{7};\ k \in \mathbb{Z}\}$ şi aceasta este mulţimea de soluţii a ecuaţiei date.

b) Ecuaţia devine echivalent: $\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 4x) \Leftrightarrow \cos 8x = \cos 6x$ cu mulţimea de soluţii $S = \{\frac{k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Se scrie ecuaţia echivalent: $\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x) \Leftrightarrow \sin 4x = \sin 2x$ cu mulţimea de soluţii $S = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Ecuaţii care conţin pătrate de sinusuri sau (şi) cosinusuri

Metoda de rezolvare constă în a trece de la pătrate de sinusuri şi cosinusuri la cosinusuri de argument dublu după formulele:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$; b) $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

R. a) Ecuaţia se scrie chivalent:
$\frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{1}{2}(1-\cos 4x) = \frac{1}{2}(1-\cos 6x) \Leftrightarrow 1 + \cos 6x = \cos 2x + \cos 4x \Leftrightarrow 2\cos^2 3x =$
$= 2\cos 3x \cdot \cos x \Leftrightarrow \cos 3x(\cos 3x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\cos x = 0$ sau $\cos 3x - \cos x = 0)$.
Ecuaţia $\cos 3x = 0$ are mulţimea de soluţii: $S_1 = \{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$, iar ecuaţia $\cos 3x = \cos x$ dă mulţimea de soluţii $S_2 = \{\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Deci ecuaţia dată are mulţimea de soluţii: $S = S_1 \cup S_2$.

b) Se aduce ecuaţia la forma echivalentă:
$\frac{1}{2}(1+\cos 2x) + \frac{1}{2}(1+\cos 6x) + \frac{1}{2}(1+\cos 10x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos 6x \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \cos 6x(2\cos 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos 6x = 0$ sau $2\cos 4x + 1 = 0)$.

Ecuaţia $\cos 6x = 0$ are mulţimea de soluţii $S_1 = \{\pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$, iar ecuaţia $2\cos 4x + 1 = 0$ are soluţiile $S_2 = \{\pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $S = S_1 \cup S_2$.

7. Ecuaţii simetrice de forma

$a(\sin f(x) + \cos f(x)) + b \sin f(x) \cos f(x) = c$.

Metodă de rezolvare. Pentru început să observăm că ecuaţia este simetrică în $\sin f(x)$ şi $\cos f(x)$, deoarece înlocuind pe $\sin f(x)$ cu $\cos f(x)$ şi pe $\cos f(x)$ cu $\sin f(x)$, ecuaţia rămâne aceeaşi.
Se notează $\sin f(x) + \cos f(x) = y$ şi se ridică la pătrat rezultând $\sin f(x)\cos f(x) = \frac{y^2-1}{2}$, iar ecuaţia dată devine $ay + \frac{b(y^2-1)}{2} = c$ cu soluţiile y_1, y_2. Se rezolvă ecuaţiile liniare $\sin f(x) + \cos f(x) = y_i$, $i = 1,2$. Aceste ecuaţii au soluţii dacă $|\sin f(x) + \cos f(x)| \le \sqrt{2}$, deoarece $\sin f(x) + \cos f(x) = \sin f(x) + \sin(\frac{\pi}{2} - f(x)) = \sqrt{2}\cos(f(x) - \frac{\pi}{4})$.
Deoarece s-a folosit ridicarea la pătrat se impune verificarea soluţiilor, găsite la rezolvarea ecuaţiilor liniare, în ecuaţia dată.

Observaţie. Analog se rezolvă şi ecuaţiile de forma:
$a(\sin f(x) - \cos f(x)) + b \sin f(x)\cos f(x) = c$.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = -1$.

R. Notând $\sin x + \cos x = y$ se obţine ecuaţia $y^2 + 5y = 0$ cu soluţiile $y_1 = 0$, $y_2 = -5$. Cum $-5 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ecuaţia $\sin x + \cos x = -5$ nu are soluţii. Ecuaţia $\sin x + \cos x = 0$ are soluţiile $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Acestea sunt şi soluţiile ecuaţiei date deoarece $\sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin x = \sin(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k \sin(-\frac{\pi}{4}) = (-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \cos(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k \cos(-\frac{\pi}{4}) = (-1)^k \cos\frac{\pi}{4} = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi deci $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = -1 + 5 \cdot 0 + 1 = 0$.

8. Ecuaţii care conţin sume de forma:

$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Metodă de rezolvare. În structura unor astfel de ecuaţii apar sume

de forma $\sin^4 x + \cos^4 x$, $\sin^6 x + \cos^6 x, \cdots$ pe care le exprimăm în funcţie de $\sin 2x$ plecând de la identitatea fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pe care o ridicăm la puteri convenabile. Avem: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$, $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = 1 - \frac{3}{4}(\sin 2x)^2$, etc.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $2(\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x + \cos^4 x = 3$.

R. Ţinând seama de scrierile de mai sus ecuaţia devine echivalent: $2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) + 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ cu mulţimea de soluţii $S = \{\frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9. Ecuaţii care conţin sume de sinusuri sau cosinusuri

Metodă de rezolvare. Pentru rezolvarea acestor ecuaţii se grupează convenabil şi se transformă sumele de sinusuri sau cosinusuri în produse în ideea de a da factor comun şi a scrie ecuaţia ca un produs de factori egal cu zero.

Problemă rezolvată

Să se rezolve ecuaţia: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

R. Scriem succesiv ecuaţia echivalent astfel:

$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x =$

$= 2\cos^2 x + \cos x \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) - \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1 = 0$ sau $\sin 2x - \cos x = 0)$.

Ecuaţia $2\cos x + 1 = 0$ are mulţimea de soluţii $S_1 = \{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$. Ecuaţia $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0$ sau $2\sin x - 1 = 0)$. Ecuaţia $\cos x = 0$ are mulţimea de soluţii $S_2 = \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, iar ecuaţia $2\sin x - 1 = 0$ are mulţimea de soluţii $S_3 = \{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

În final mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

10. Ecuaţii nestandard. Dacă la tipurile precedente de ecuaţii avem o tehnică de lucru, la anumite ecuaţii surprinde forma lor şi de aici şi dificultatea de abordare. Există de asemenea ecuaţii de formă aparent cunoscută, dar la care nu funcţionează maniera de lucru de la acestea. Alte ecuaţii reclamă, de la începutul rezolvării lor, subtilităţi de raţionament. Am denumit aceste ecuaţii nestandard nu prin prisma complexităţi lor, ci prin natura puţin uzuală a structurii lor, a aspectului lor.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$; b) $\sin x = x^2 + x + 1$; c) $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$;

d) $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$; e) $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$;

f) $[\sin x]\{\sin x\} = \sin x$.

R. a) Să observăm că membrul stâng al ecuaţiei se poate majora cu doi, deoarece $|2\sin x| \leq 2$, în timp ce pentru membrul drept avem $5x^2 + 2x + 3 = 5(x + \frac{1}{5})^2 + \frac{14}{5} \geq \frac{14}{5} > 2$. Aceasta ne arată că $2\sin x < 5x^2 + 2x + 3$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ şi deci ecuaţia dată nu are soluţii.

b) În acest caz metoda de mai sus nu funcţionează pe $\mathbb{R}$. Dar din graficele funcţiilor (trasaţi aceste grafice) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + x + 1$ se constată că $x^2 + x + 1 > 1$ dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ în timp ce $\sin x \leq 1$. Aceasta arată că ecuaţia nu are soluţii în $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$. Dacă $x \in [-1, 0]$ avem $x^2 + x + 1 > 0$, în timp ce $\sin x \leq 0$ şi din nou ecuaţia nu are soluţii.

Deci, în final ecuaţia dată nu are soluţii.

c) Cum $\cos^7 x \leq \cos^2 x$ şi $\sin^4 x \leq \sin^2 x$ rezultă $1 = \cos^7 x + \sin^4 x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. De aici avem peste tot egalitate, ceea ce se întîmplă dacă $\cos^7 x = \cos^2 x$ şi $\sin^4 x = \sin^2 x$. Rezolvând ecuaţiile găsim că ecuaţia dată are mulţimea de soluţii:

$$S = \{\pm\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Se scrie ecuaţia sub forma: $2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) - 2\cos^2(\frac{x+y}{2}) + 1 = \frac{3}{2}$ şi se notează $\cos(\frac{x+y}{2}) = t$. Ecuaţia de gradul doi în t are soluţii reale dacă discriminantul este pozitiv, adică $\cos^2(\frac{x-y}{2}) - 1 \geq 0$ sau $\cos^2(\frac{x-y}{2}) \geq 1$. Cum $\cos x \leq 1$, deducem $\cos^2(\frac{x-y}{2}) = 1$.

Dacă $\cos(\frac{x-y}{2}) = 1$, atunci ecuaţia în t este $4t^2 - 4t + 1 = 0$, cu $t = \frac{1}{2}$.

Rezolvând sistemul: $\cos(\frac{x-y}{2}) = 1$, $\cos(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}$ rezultă $x - y = 4k\pi$, $x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 4l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

De aici $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2(l + k)\pi$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2(l - k)\pi$, $l, k \in \mathbb{Z}$.

e) Se scrie ecuaţia sub forma $\sin(\sin x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \cos x)$. De aici $\sin x = (-1)^k(\frac{\pi}{2} - \cos x) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ rezultă $\sin x + \cos x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, ecuaţie ce nu are soluţii deoarece

$$|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2} < |\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi|.$$

Pentru $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, ecuaţia nu are soluţii.

f) Cum $-1 \leq \sin x \leq 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ se analizează cazurile:

1°) dacă $\sin x \in \{-1, 0, 1\}$, atunci $\{\sin x\} = 0$ şi ecuaţia se reduce la $\sin x = 0$ cu soluţiile $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2°) dacă $-1 < \sin x < 0$, atunci $[\sin x] = -1$, iar din $\{a\} = a - [a]$ deducem $\{\sin x\} = \sin x + 1$, iar ecuaţia se scrie $\sin x = -\frac{1}{2}$ cu soluţiile $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3°) dacă $0 < \sin x < 1$, când $[\sin x] = 0$ şi ecuaţia devine $\sin x = 0$, fals.
Mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este: $S = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

11. Ecuaţii trigonometrice care conţin funcţii inverse Vom prezenta (ca şi în cazul ecuaţiilor trigonometrice care conţin funcţiile trigonometrice directe) un tabel cu rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice fundamentale, cu funcţii inverse. Vom vedea din cele câteva ecuaţii rezolvate că acestea în final conduc la rezolvarea unor astfel de ecuaţii trigonometrice.

Ecuaţia	$a < -\frac{\pi}{2}$	$a = -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$	$a = \frac{\pi}{2}$	$a > \frac{\pi}{2}$
$\arcsin x = a$	nici o soluţie	$x_1 = -1$	$x_1 = \sin a$	$x_1 = 1$	nici o soluţie

Ecuaţţia	$b < 0$	$b = 0$	$0 < b < \pi$	$b = \pi$	$b > \pi$
$\arccos x = b$	nici o soluţie	$x_1 = 1$	$x_1 = \cos b$	$x_1 = -1$	nici o soluţie

Ecuaţia	$c \le -\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$	$c \ge \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arctg} x = c$	nici o soluţie	$x_1 = \operatorname{tg} c$	nici o soluţie

Ecuaţia	$d \le 0$	$0 < d < \pi$	$d \ge \pi$
$\operatorname{arcctg} x = d$	nici o soluţie	$x_1 = \operatorname{ctg} d$	nici o soluţie

Dacă o ecuaţie conţine diferite funcţii inverse, atunci ecuaţia se reduce la o ecuaţie algebrică prin aplicarea ambilor membri aceeaşi funcţie trigonometrică directă. Se obţin rădăcini străine care se elimină prin verificarea directă în ecuaţie. Dacă funcţia aleasă este tangenta sau cotangenta, atunci soluţiile care nu sunt în domeniul de definiţie a acestor funcţii se pot pierde. De aceea trebuie văzut dacă nu sunt soluţii ale ecuaţiei iniţiale acele valori care nu aparţin domeniului de definiţie a acestor funcţii.

Probleme rezolvate

Să se rezolve ecuaţiile:
a) $2\arcsin^2 x - \arcsin x - 6 = 0$; b) $2\operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x$;
c) $\arcsin(6x) + \arcsin(6\sqrt{3}x) = -\frac{\pi}{2}$; d) $\arcsin x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.
R. a) Se impune condiţia $x \in [-1, 1]$. Se notează $\arcsin x = y$ şi se obţine ecuaţia $2y^2 - y - 6 = 0$ cu soluţiile $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Cum $y_1 = 2 \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ecuaţia $\arcsin x = 2$ nu are soluţie. Pentru $y_2 = -\frac{3}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ecuaţia $\arcsin x = -\frac{3}{2}$ are soluţia $x = -\sin(\frac{3}{2})$.
b) Se impune condiţia de existenţă pentru $\arccos x$. Avem $x \in [-1, 1]$. Se aplică ambilor membri funcţia cosinus şi rezultă:
$\frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = x$ sau $2x^3 - x = 0$ cu soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Am folosit formula $\cos 2y = \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{1+\operatorname{tg}^2 y}$, $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$.
Verificând în ecuaţie valorile găsite pentru x constatăm că numai $x = 0$ verifică ecuaţia.
Deci $x = 0$ este unica soluţie a ecuaţiei.
c) Se aduce ecuaţia la forma (se impune condiţia $-1 \le 6\sqrt{3}x \le 1$)
$\arcsin(6x) = -\frac{\pi}{2} - \arcsin(6\sqrt{3}x)$
şi se aplică ambilor membri funcţia sinus rezultând ecuaţia $6x = -\sqrt{1 - 108x^2}$ cu soluţiile $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = -\frac{1}{12}$. Se constată că numai $x = -\frac{1}{12}$ verifică ecuaţia.
d) Cum $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, ecuaţia se reduce la $\arcsin x = \operatorname{arctg} x$. Se aplică funcţia sinus ambilor membri şi se obţine ecuaţia $x = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ cu unica soluţie $x = 0$. Aceasta verifică şi ecuaţia dată.

Inecuaţii trigonometrice

Vom examina în acest paragraf câteva inecuaţii în care apar funcţii trigonometrice directe şi apoi funcţii trigonometrice inverse al căror argumente conţin necunoscuta. Aceste inecuaţii se aduc la forma $f(x) \le (\ge) 0$.
Dacă funcţia f conţine funcţii trigonometrice directe, atunci se precizează perioada comună a lor, să spunem T_0, şi se face rezolvarea inecuaţiei pe intervalul $[0, T_0)$. Utilizând periodicitatea funcţiilor, mulţimea tuturor soluţiilor inecuaţiei date (pe domeniul maxim de definiţie) se obţine adăugând la capetele intervalului (intervalelor) soluţie din intervalul $[0, T_0)$ multiplu întreg de perioada principală. Spre exemplu dacă mulţimea de soluţii ar fi intervalul (α, β), $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \le T_0$, atunci mulţimea finală de soluţii a inecuaţiei este $(\alpha + kT_0, \beta + kT_0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
A rezolva inecuaţia $f(x) \le (\ge) 0$ revine la a stabili semnul lui f.
Vom proceda ca şi la inecuaţiile exponenţiale şi logaritmice, adică vom determina mai întâi soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ şi apoi semnul pe intervalele pe care f nu se anulează, alegând convenabil din fiecare interval o valoare x_0 şi determinând semnul lui $f(x_0)$. Acest semn îl va avea funcţia pe tot intervalul care-l conţine pe x_0.

Probleme rezolvate

1. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\sin x > \sin 2x$; b) $\cos 3x \leq \cos x$; c) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x < -1$;
d) $\frac{2\sin^2 x}{\sin x - 1} < -1$.

R. a) Inecuaţia se scrie echivalent: $f(x) = \sin x(2\cos x - 1) < 0$.
În structura funcţiei f intră funcţiile periodice sin şi cos, de perioadă principală $T_0 = 2\pi$. Vom rezolva inecuaţia pe intervalul $[0, 2\pi)$. Pentru aceasta se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ în acest interval şi găsim soluţiile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{5\pi}{3}$ ($\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi se particularizează $k \in \mathbb{Z}$ pentru a obţine valorile $x_1, x_2, \cdots$)
Tabelul de semn al funcţiei este:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Pentru a vedea semnul funcţiei în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$ alegem $x = \frac{\pi}{6}$ şi calculăm $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$. Pe intervalul $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ se calculează $f(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ (observaţi semnele alternează dacă rădăcinile $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi, \cdots$ sunt simple.
Deci pe intervalul $[0, 2\pi)$ soluţia inecuaţiei este: $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.
Mulţimea de soluţii din $\mathbb{R}$ a inecuaţiei este $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.

b) Se aduce inecuaţia la forma echivalentă:
$f(x) = \cos x(4\cos^2 x - 4) \leq 0$.
Evident perioada principală a funcţiei f este $T_0 = 2\pi$ (dată de funcţia cosinus). Se rezolvă inecuaţia pe intervalul $[0, 2\pi)$.
Soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$ în acest interval sunt:
$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$.
Tabelul de semn al funcţiei este:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Prin urmare $f(x) \leq 0$ dacă $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
În final mulţimea de soluţii este
$[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \cup [\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Scriem inecuaţia sub forma $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 < 0$.
Funcţia f are period principală $T_0 = \pi$. Soluţiile ecuaţiei liniare $f(x) = 0$ în intervalul $[0, \pi)$ sunt $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.
Tabelul de semn al funcţiei este:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De aici $f(x) < 0$ dacă $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$. În final mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Se impune condiţia $\sin x - 1 \neq 0$ şi se aduce inecuaţia la forma: $f(x) = \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$. Perioada principală a funcţiei f este $T_0 = 2\pi$. Se face tabelul de semn al lui f utilizând semnul numărătorului şi semnul numitorului. Avem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$2\sin^2 x + \sin x - 1$		$-$	0	$+$			0	$-$	0	$+$	
$\sin x - 1$				$-$	0	$-$				$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Deci $f(x) < 0$ dacă $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$.
Mulţimea de soluţii a inecuaţiei este $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\arcsin 2x \leq \frac{\pi}{6}$; b) $16\arcsin^2 x - \pi^2 < 0$; c) $\arccos x - \arcsin x \geq \frac{\pi}{6}$.

R. a) Se impune condiţia de existenţă $-1 \leq 2x \leq 1$, adică $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.
Inecuaţia se scrie $f(x) = \arcsin 2x - \frac{\pi}{6} \leq 0$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = \frac{1}{4}$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Deci $f(x) \leq 0$ dacă $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

b) Domeniul de definiţie pentru inecuaţie este $x \in [-1, 1]$.
Scriem inecuaţia sub forma $f(x) = 16\arcsin^2 x - \pi^2 \leq 0$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tabelul de semn al funcţiei este:

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Avem $f(x) \leq 0$ dacă $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

c) Se scrie inecuaţia sub forma: $f(x) = \arccos x - \arcsin x - \frac{\pi}{6} \geq 0$.
Inecuaţia există dacă $x \in [-1, 1]$. Ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţia $x = \frac{1}{2}$.
Tabelul de semn al funcţiei este:

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Deci $f(x) \geq 0$ pentru $x \in [-1, \frac{1}{2}]$.

Probleme propuse

1. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\sin x = \sin 5x$; 2) $\sin 2x = -\sin 3x$; 3) $\sin \frac{x}{2} = \sin 3x$;
4) $\sin 6x = -\sin 4x$; 5) $\sin 2x = \sin 6x$; 6) $\cos x = \cos 5x$;
7) $\cos 2x = -\cos 5x$; 8) $\cos(\frac{x}{3}) = \cos(\frac{x}{2})$; 9) $\cos 4x = \cos 10x$;
10) $\cos 3x = -\cos 5x$; 11) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$; 12) $\operatorname{tg} 6x = -\operatorname{tg} 3x$;
13) $\operatorname{tg}(\frac{5x}{3}) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 14) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 2x$; 15) $\operatorname{ctg}(\frac{x}{4}) = \operatorname{ctg}(\frac{x}{2})$;
16) $\operatorname{ctg} 4x = -\operatorname{ctg} x$.

2. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 2) $2\cos 2x = 8\cos x - 1$;
3) $\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$;
5) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$; 6) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x = 3$;
7) $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$; 8) $6\cos^2 x + \cos 3x = \cos x$;
9) $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$; 10) $\cos 4x = \cos^2 3x$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $3\cos x + 4\sin x = 0$; 2) $3\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;
3) $\sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$; 4) $\sin x - \cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$;
5) $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$;
6) $2\sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2\sin x \cos^2 x - \cos^3 x = 0$;
7) $3\sin^2 x \cos x - 4\sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$;
8) $2\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0$; 9) $3\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 2$;
10) $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$; 11) $2\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\sin x = 0$;
12) $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$.

4. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\sin x + \cos x = 1$; 2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;
3) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$; 4) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1$;
5)* $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 4x$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
7) $\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1 = 0$.

5. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\sin 3x \sin 7x = \sin x \sin 9x$; 2) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$;
3) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$; 4) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$;
5) $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$;
6) $\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x = \sin 3x \cos 5x$.

6. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$; 2) $4\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 7$;
3) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$;
4) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;
5) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}$; 6) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$;
7) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

7. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x = 1$;
3) $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$; 4) $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}\sin x$;
5) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sqrt{2}}$; 6) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3\sin 2x}{2}$.

8. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; 2) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$;
3) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 4) $\sin^6 2x + \cos^6 2x = \frac{7}{16}$;
5) $\sin^6 x + \cos^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$; 6) $\sin^8 x + \cos^8 x = \cos^2 2x$.

9. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$; 2) $\sin 4x + \sin 12x + \cos 4x = 0$;
3) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$;
4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
5) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$; 6) $\sin x + 2\sin^2 x + \sin 5x - 1 = 0$;
7) $\sin 3x - \cos 2x = \sin x$; 8) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$;
9) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
10) $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$.

10. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $1 + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$; 2) $3\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} + x) = \operatorname{tg} 2x$;
3) $\operatorname{tg} 2x - 2 = 2\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$; 4) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{ctg} x - 1$;
5) $(\cos x - \sin x)(2\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}) + 2 = 0$;
6) $3\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x$; 7) $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$; 8) $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$;
9) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0$; 10) $\cos x \operatorname{tg} 3x = 0$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2$;
2) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$;
3) $\sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x)\sin(\frac{\pi}{3} + x) = \frac{1}{8}$;
4) $8\cos x + \sqrt{3}\operatorname{cosec} x = \sec x$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$;
5) $16\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1$; 6) $\operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$;
7) $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$; 8) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$;
9) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}$;
10) $\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{1}{\cos 3x \cos 4x} = 0$;

11) $\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=(\sin x+\cos x)^2$; 12) $\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$;
13) $\sqrt{2\sin x}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}x$; 14) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$;
15) $\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\cos 2x}=1$; 16) $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}=\sqrt{6}$;
17) $\sqrt[3]{\sin^2 x}-\sqrt[3]{\cos^2 x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$; 18) $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}$.

12. Să se rezolve şi discute ecuaţiile (după valorile parametrului real m):
1) $(m-1)\sin^2 x-2(m+1)\sin x+2m-1=0$; 2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x-m=0$;
3) $\sin^2 x+2(m-1)\sin x\cos x+(m^2-2m)\cos^2 x=0$;
4) $\sin^2 x+(m+1)\sin x\cos x+m=0$; 5) $\sin x+\sin 3x=m\sin x$.

13. Să se rezolve ecuaţiile:
1) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $\arcsin x+\arccos(x-1)=\pi$;
3) $2\arccos(-\frac{x}{2})=\arccos(x+3)$; 4) $2\arcsin x=\arcsin(\sqrt{2}x)$;
5) $\operatorname{arctg}(\frac{x}{3})+\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})=\operatorname{arctg}x$; 6) $2\operatorname{arctg}x=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$;
7) $\arccos(\sin x)=\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}$; 8) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}$;
9) $\operatorname{arctg}3x-\operatorname{arcctg}3x=\frac{\pi}{4}$; 10) $3\arcsin x+\pi x-\pi=0$;
11) $\arccos x-\arcsin x=\frac{\pi}{6}$.

14. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $\cos 2x>\cos 4x$; 2) $\operatorname{tg}x\geq\operatorname{tg}2x$; 3) $2\sin^2 x+\sin x-1\leq 0$;
4) $\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x<0$; 5) $4\sin^2 x+\sin^2 2x\geq 3$;
6) $2\cos^2 x+3\sin 2x-8\sin^2 x\geq 0$; 7) $\sin 2x\sin 6x\geq\sin 3x\sin 5x$;
8) $\frac{\sin x}{1+\cos x}\geq 0$; 9) $\sin x+\cos x<\frac{1}{\cos x}$; 10) $\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|\leq 1$;
11) $\frac{\operatorname{tg}^2 x-2}{\operatorname{tg}^2 x-1}<\frac{1}{2}$; 12) $\sqrt{3-4\cos^2 x}>2\sin x+1$.

15. Să se rezolve inecuaţiile:
1) $\arcsin 3x>\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos 2x\leq 0$; 3) $\operatorname{arctg}3x\leq-\frac{\pi}{4}$;
4) $9\arccos^2(2x)-\pi^2<0$; 5) $2\arcsin x<\arcsin(\sqrt{2}x)$;
6) $\arcsin x>.\arccos\sqrt{1-x^2}$; 7) $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arcctg}x\geq\frac{\pi}{6}$;
8) $\arcsin x+\arccos(1-x)>\arcsin(-x)$;
9) $\frac{\arccos x}{\arcsin^2 x-3\arcsin x}\geq 0$; 10) $\frac{2}{\operatorname{arctg}x}-\operatorname{arctg}x<1$.

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln[(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m]$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $D=\mathbb{R}$.

2. a) Să se arate că dacă $a>1$, $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi $x+y>2z$, atunci $a^x+a^y>2a^z$.
b) Să se arate că dacă $a,b,c>0$, $a,b,c\neq 1$, atunci $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$.

3. a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\frac{m+1}{m-2})^x$ să fie exponenţială şi apoi studiaţi monotonia acestei funcţii.
b) Se consideră $f:(\frac{1}{3},\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(3x-1)$. Să se arate că f este inversabilă şi să se determine inversa ei.

4. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $4^x+2^{x+1}\cdot 3^x=3\cdot 9^x$; b) $x^2+1+\lg x=2$.

5. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2})$; b) $\log_{x-3}(x-1)<2$.

6. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:
a) $\begin{cases}2^x+3^y=11\\5^x-2^y=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=4\\\log_4 x+\log_2 y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

7. Să se rezolve sistemul de inecuaţii: $\begin{cases}\lg(x-3)<1\\4^x+16>17\cdot 2^x.\end{cases}$

8. Să se arate că $\sin(2\operatorname{arctg}x)=\sin(2\operatorname{arctg}\frac{1}{x})$, $x\neq 0$.

9. Fie ecuaţia $(m+2)\cos 4x+(m-2)\sin 2x-m=0$, $m\in\mathbb{R}$.
a) Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ ecuaţia admite şi soluţii independente de m.
b) Să se afle toate valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia admite şi soluţii care depind de m şi să se determine aceste soluţii.

10. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să avem:
$(m-2)e^{2x}+2(2m-3)e^x+m-2>0$.
a) $m\in\emptyset$; b) $m=2$; c) $m\in[2,\infty)$; d) $m\in(1,\frac{5}{3})$.
(ADMITERE, ŞTIINŢE ECONOMICE, BRAŞOV, 1999)

11. Să se determine soluţiile inecuaţiei: $(\frac{1}{2})^{\log_9(x^2-3x+3)}\geq 1$.
a) $x\in(1,2)$; b) $x\in\mathbb{R}$; c) $x\in[1,2)$; d) $x\in(1,2]$; e) $x\in[1,2]$.
(ADMITERE, UNIV., ŞTIINŢE ECONOMICE, GALAŢI, 2000)

12. Ştiind că intervalul (a,b) este mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\log_{\frac{1}{6}}(\log_6\sqrt{6-x})>0$, să se calculeze $b-a$.
a) 35; b) 24; c) 10; d) 1; e) 18.
(ADMITERE, UNIV., PROFIL ECONOMIC, BRAŞOV, 2001)

Testul 2

1. a) Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=3\sqrt{x(x+1)}$.
b) Să se determine valorile lui x pentru care există funcţia $f(x)=\log_{x^2-x-2}\sqrt[3-x^2]{9-x^2}$.

2. a) Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=2^x$. Să se arate că:
i) $f(\frac{2x+y}{3})\leq\frac{2f(x)+f(y)}{3}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$; ii) $f(x)+f(-x)\geq f(1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
b) Fie $a,b,c>0$, $a^2+b^2=c^2$, $c\pm b\neq 1$. Să se arate că $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$.

3. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $(m+1)2^{-2x} + m2^{-x} + m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Fie $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$. Să se arate că $a^{\lg \frac{b}{c}} \cdot b^{\lg \frac{c}{a}} \cdot c^{\lg \frac{a}{b}} = 1$.

5. Să se rezolve ecuaţiile: a) $3^{\sqrt{x-2}} + 4^{\sqrt{x^2-4}} + 5^{\sqrt{x^3-8}} + 6^{\sqrt{x^4-16}} = 4$;
b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$.

6. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\frac{1}{3^x+3} - \frac{1}{3^x-3} \geq \frac{1}{9^x-9}$; b) $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0$.

7. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:
a) $\begin{cases} 4^x - 5 \cdot 9^y = -1 \\ 4^x + 2^x \cdot 3^y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3^{\log_2 x} \cdot 4^{\log_2 y} = 36 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$

8. Să se determine domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \arccos \frac{2x}{x^2-1}$.

9. Să se rezolve ecuaţiile: a) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;
b) $2\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$; c) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

10. Să se rezolve ecuaţia $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = 98$.
(ADMITERE, INSTITUTUL ROMÂN DE INFORMAŢII, BUCUREŞTI, 1999)

11. Să se determine mulţimea soluţiilor inecuaţiei $\frac{\log_a x^2 - 7\log_a x + 12}{x^2-9} > 0$, unde $a \in (0,1)$.
(ADMITERE, UNIV., MATEMATICĂ, SIBIU, 2000)

12. Dacă $\log_{12} 18 = a$, atunci $\log_{108} 8$ este egal cu:
a) $\frac{2(a-1)}{a+2}$; b) $3a+2$; c) $\frac{3(2a-1)}{4a-1}$; d) $\frac{3(2-a)}{4a+1}$; e) $\frac{a+1}{2-a}$.
(ADMITERE, UNIV., INGINERI, BRAŞOV, 2001)

Testul 3

1. a) Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\frac{1}{2})^{\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-3x+2}}$.
b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care există logaritmul $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-5)$.

2. a) Fie $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = 3^x$. Arătaţi că:
$f(0) + f(1) + \ldots + f(100) = \frac{1}{2}[f(101) - 1]$.
b) Să se arate că $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi apoi comparaţi numerele $\log_5 6$ şi $\log_6 7$.

3. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \mathbb{Q} \\ 4^x, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ este injectivă dar nu este strict monotonă.

4. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x = 6$; b) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

5. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x > 0$; b) $2\log_7 x - \log_x 49 < 3$.

6. Să se rezolve sistemele:
a) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24 \\ 2^y \cdot 3^x = 54 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$

7. Să se rezolve ecuaţiile trigonometrice: a) $2\sin x + \cos x = 1$;
b) $2\sin x + \cos x = \sin^2 x + 1$; c) $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$.

8. a) Să se rezolve ecuaţia $3^{x+2} \cdot 9^{x+1} = 81(27^x + \frac{9}{3^x} - 1)$.
b) Să se rezolve inecuaţia $x^{\log_3 x - \log_9(x+6)} \geq 1$.
(ADMITERE, UNIV., CONSTANŢA, 1999)

9. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care au loc inegalităţile $\frac{1}{3} \leq \frac{3^x+1}{9^x+3} \leq \frac{1}{2}$ sunt:
a) $x \in (-\infty, 2)$; b) $x \in [1,2)$; c) $x \in \emptyset$; d) $x \in \mathbb{R}$; e) $x \in (-\infty, 1]$.
(ADMITERE, UNIV., PROFIL ECONOMIC, PLOIEŞTI, 2000)

10. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care numărul rădăcinilor raţionale ale ecuaţiei $2 + 4n\log_9 x = \log_3(10x^{2n-2} - 1)$ este maxim.
a) $n = 2$; b) $n = 3$; c) $n = 4$; d) $n = 9$; e) $n = 10$.
(ADMITERE, UNIV. TEHNICĂ, INGINERI, CLUJ-NAPOCA, 2001)

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

pag. 10
1) $[1,4]$; **2)** $[2,10]$; **3)** $[2,3]$; **4)** $[-2,-1]$; **5)** $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$; **6)** $[-1,1]$; **7)** $[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$; **8)** $[-2,0] \cup (1,9]$; **9)** $(1,\sqrt{3}] \cup [2,5]$.
pag. 17
1) DA, strict crescătoare; **2)** NU; **3)** DA, strict descrescătoare; **4)** DA, strict crescătoare; **5)** DA, strict crescătoare; **6)** NU.
pag. 20
1) strict descrescătoare; **2)** strict crescătoare; **3)** strict descrescătoare; **4)** strict crescătoare; **5)** strict descrescătoare; **6)** strict descrescătoare; **7)** strict descrescătoare; **8)** strict descrescătoare; **9)** strict descrescătoare; **10** strict crescătoare.
pag. 34
1. 1) DA; 2) NU; 3) DA; **2.** 1) DA; 2) NU; 3) DA; 4) DA; 5) NU; 6) NU.
pag. 38
1) este surjectivă; **2)** nu este surjectivă; **3)** nu este surjectivă; **4)** este surjectivă; **5)** nu este surjectivă; **6)** este surjectivă.

pag. 46

1) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&4&2\end{pmatrix}$; **2)** $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 5&4&2&3&1\end{pmatrix}$;

3) $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{5}$; **4)** $f^{-1}(x)=\frac{2-x}{3}$; **5)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-3, & x<1\\ \frac{x-5}{2}, & x\geq 1\end{cases}$;

6) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{3}, & x\leq -2\\ -1-x, & x>-2\end{cases}$; **7)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -\frac{x}{5}, & x<0\end{cases}$;

8) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x>0\\ 1+x, & x\leq 0\end{cases}$; **9)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}, & x\geq -\frac{1}{4}\\ \sqrt{-x}, & x<-\frac{1}{4}\end{cases}$;

10) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}, & x\geq -1\\ (x+1)^3, & x<-1\end{cases}$; **11)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2-2, & x\geq 0\\ -\sqrt{4-x}, & x<0.\end{cases}$

pag. 63

5. 1) Prin simetria în raport cu axa Ox; 3) $f(x)=2^{-x}$;

6. 1) Nu, fiind o funcţie convexă; 2) $|x|\geq 0\Rightarrow 3^{|x|}\geq 3^0=1$; $\min f_1=1$ pentru $x=0$; Dacă $x>0$, atunci $x+\frac{1}{x}\geq 2$, cu egalitate dacă $x=1$. Deci $f_2(x)=3^x+\frac{1}{3^x}\geq 2$, $x\in\mathbb{R}$ şi deci $\min f_2=2$ daca $x=0$;

9. 1) $\min f=1$, pentru $x=0$; 2) $\min f=1$, pentru $x=0$, $\max f=2$ pentru $x=\pm 1$; 3) $\max f=1$ pentru $x=\pm 2$, $\min f=\frac{1}{9}$ pentru $x=0$; 4) $\max f=1$ pentru $x=0$; 5) $\max f=4$ pentru $x=(-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\min f=1$ pentru $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $\max f=4$ pentru $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 7) $\max f=9$ pentru $x=\pi+2k\pi$, $\min f=1$ pentru $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 8) $\max f=6$ pentru $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $\min f=3$ pentru $x=\pi+2k\pi$; 9) $\min f=4$ pentru $x=2$;

13. 1) $0<x<2$; 2) $3<x<4$; 3) $-3<x<-2$; 4) $-1<x<0$;

14. 1) $0<a<1$; 2) $0<a<1$; 3) $a>1$; 4) $a>1$; 5) $a>1$; 6) $a>1$; **16.** 1) 14; 2) 52;

18. 1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare; 3) strict crescătoare; 4) strict descrescătoare; 5) $f(x)=(\frac{3}{2})^x+(\frac{5}{2})^x$; strict crescătoare; 6) strict descrescătoare; 7) strict crescătoare; 8) strict crescătoare; 9) strict descrescătoare; 10) strict crescătoare; 11) strict descrescătoare; 12) strict crescătoare;

19. $f(x)=(5^x-5)(2^x-4)+3$;

20. strict descrescătoare; dacă $x>1$, atunci $a^x>a$, $(1-a)^x>1-a$ şi deci $f(x)=a^x+(1-a)^x>1$;

21. $a>1$ funcţie strict crescătoare; $0<a<1$ funcţie strict descrescătoare;

22. Dacă $0<a<1$ funcţie strict crescătoare (sumă de funcţii strict crescătoare); Dacă $a>1$, atunci $f(x)=a^x[(1+\frac{1}{a})^x-1]$ este strict crescătoare (ca produsul a două funcţii strict crescătoare şi pozitive pe $[0,\infty)$);

23*. Au loc cazurile: 1) $0<a,b<1$, funcţie strict crescătoare; 2) $0<a<1$, $b=1$, $f(x)=a$; 3) $0<a<1$, $b>1$, funcţie strict descrescătoare; 4) $a=1$, $b>0$, $f(x)=1$; 5) $a>1$, $0<b<1$, funcţie strict descrescătoare; 6) $a>1$, $b=1$, $f(x)=a$; 7) $a>1$, $b>1$ din $x_1<x_2\Rightarrow b^{x_1}<b^{x_2}\Rightarrow a^{b^{x_1}}<a^{b^{x_2}}\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, funcţie strict crescătoare.

24*. 1) $f(2)=f(\frac{1}{2})$; 2) g este strict crescătoare; Fie $1\leq y<x$. Atunci $g(x)>g(y)\Leftrightarrow a^y(a^{x-y}-1)>a^{\frac{1}{y}}(1-a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}})$ adevărat deoarece $a^y\geq a^{\frac{1}{y}}$ şi $a^{x-y}-1>1-a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\Leftrightarrow a^{x-y}+a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\geq 2$ (din inegalitatea mediilor).

25*. Se aplică inegalitatea mediilor: $xa^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}a^x\geq 2a$; $\min f=2a=f(1)$.

26*. 1) Se arată că dacă $a>1$, atunci f este strict descrescătoare pe $(-\infty,\frac{1}{2}]$ şi strict crescătoare pe $[\frac{1}{2},\infty)$. Se scrie raportul de variaţie a funcţiei f sub forma $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{a^x-a^y}{x-y}\cdot\frac{a^{x+y}-a}{a^{x+y}}$, etc. Dacă $0<a<1$, atunci funcţia f are aceeaşi monotonie pe intervalele considerate.

2) Dacă $a=b$, atunci $f(x)=a+b$. Pentru $a\neq b$, $f(x)=b(\frac{a}{b})^x+a(\frac{b}{a})^x$. Fie $g(x)=\frac{1}{b}f(x)=(\frac{a}{b})^x+(\frac{a}{b})^{1-x}=c^x+c^{1-x}$ şi este funcţia de la 1). Deci g este strict descrescătoare pe $[0,\frac{1}{2}]$ şi strict crescătoare pe $[\frac{1}{2},1]$.

pag. 74

1. 1) 3; 2) -1; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; 4) 3; 5) -3; 6) $\log_{49}4=\log_{7^2}2^2=\log_7 2$; 22; 7) Se trec toţi logaritmii în bază 2; 10; 8) $(m+n)c^{\log_c b\cdot\log_c a}$.

2. 1) 2; 2) 10; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}=\sqrt{6-\sqrt{3}}$; $\sqrt{6+\sqrt{3}}\sqrt{6-\sqrt{3}}=\sqrt{33}$; 1; 5) 0; $\lg(\operatorname{tg}45^\circ)=\lg 1=0$; 6) $\log_a b$; 7) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$; $6\log_n a$; 8) 0; 9) $\frac{1}{3}$.

3. 1) $x=\frac{8\cdot 5^3}{9}$; 2) $x=\frac{8}{45}$; 3) $x=5$.

4. 1) -3; 2) $1-a$; 3) $1+2a$; 4) $\frac{a+3}{2(a+1)}$; 5) $\frac{4(3-a)}{3+a}$; 6) $2b-a+1$; 7) $-a-b-2$; 8) $\frac{b}{1-a}$; 9) $\frac{2-a}{a+b}$; 10) $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$; 11) $\frac{a+1}{2a+b}$.

8. 1) 3; 2) 2.

10. Dacă $a=1$, atunci $0=0$; dacă $a\neq 1$, se trec logaritmii în baza a şi se ajunge la $\log_a(c^2-b^2)=2$, adevărată deoarece $c^2-b^2=a^2$.

12. 4; **14.** Se aduc logaritmii în baza a.

pag. 84

1. 1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare; 3) strict crescătoare; 4) strict descrescătoare; 5) strict crescătoare; 6) strict descrescătoare;

2. 1) $(3,4)$; 2) $(-3,-2)$; 3) $(0,1)$; 4) $(3,4)$; 5) $(-3,-2)$;

3. 1) $a<b$; 2) $a<b$; 3) $a<b$; 4) $a>b$; 5) $a<b$; 6) $a>b$ dacă $x\in(1,5)\cup(0,\frac{1}{5})$; $a=b$, dacă $x\in\{\frac{1}{5},5\}$; $a<b$, dacă $x\in(\frac{1}{5},1)\cup(5,\infty)$; 7) Presupunem $x>y$ şi se analizează cazurile: 1) $1<y<x$, $a<1<b$; 2) $y<x<1$, $b<1<a$; 3) $y<1<x$, dacă $1<\frac{1}{y}<x$, din 1) rezultă $\log_x\frac{1}{y}<1<\log_{\frac{1}{y}}x$ şi deci $\log_y x<-1<\log_x y<0$; Analog $1<x<\frac{1}{y}$, 4) $x=y$, $a=b=1$.

4. 1) $m>n$; 2) $m<n$; 3) $m<n$.

5. 1) pozitiv; 2) negativ; 3) negativ; 4) negativ; 5) pozitiv; 6) negativ.

6. 1) $x>1$; 2) $x\in(0,1)$; 3) $x>3$; 4) $x\in(0,\frac{1}{2})$.

7. 2) $6(\lg 2+\lg 3)^2>25\lg 3\lg 2\Leftrightarrow(\lg 9-\lg 8)(\lg 27-\lg 4)>0$; 3) $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c\geq 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}$; 4) Se adună inegalităţile: $\log_{ab}(bc)+\log_{bc}(ab)\geq 2$, etc. Altfel se trec logaritmii în aceeaşi bază şi se notează $x=\log a$, etc. 5) $\sqrt{\lg x\lg y}<\frac{\lg x+\lg y}{2}=\lg\sqrt{xy}<\lg(x+y)$; Se logaritmează şi rezultă $(x-y)(\lg x-\lg y)>0$.

8. $\log_{\frac{1}{2}}ab=\log_{\frac{1}{2}}a+\log_{\frac{1}{2}}b\geq 2\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}a\log_{\frac{1}{2}}b}=2\Rightarrow ab\leq\frac{1}{4}$, cu egalitate pentru $a=b=\frac{1}{2}$.

9. 1) $\sqrt{(3\lg a+1)\cdot 1}<\frac{3\lg a+1+1}{2}=\frac{3\lg a+2}{2}$; 2*) $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$. Cu această inegalitate din cea dată rezultă $\log_z\frac{xz}{y}>\log_{y+r}(x+r)\Leftrightarrow 1+\log_z\frac{x}{y}>\log_{y+r}(x+r)\Leftrightarrow\log_z\frac{x}{y}>\log_{y+r}(\frac{x+r}{y+r})$; 3*) 1°) $\sqrt{\log_a b}\leq\frac{1+\log_a b}{2}=\log_a\sqrt{ab}$; 2°) $a^{\sqrt{\log_a b}}\geq a^{\log_a\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$ şi $b^{\sqrt{\log_b a}}\geq\sqrt{ab}$; 4) Din ipoteză prin logaritmare rezultă $\lg a-\lg b>\lg c-\lg a$ sau $2\lg a>\lg b+\lg c>2\sqrt{\lg c\cdot\lg b}$; 5) $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}\Rightarrow\log_a(\frac{2ab}{a+b})\geq\log_a\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\log_a b+1)$ şi $\log_b(\frac{2ab}{a+b})\geq\log_b\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(1+\log_b a)$ şi se adună inegalităţile ţinând seama ca $\log_a b+\log_b a\geq 2$.

6) $\ln x+\ln y<2\ln(x+y)$, $\ln x+\ln y\geq 2\sqrt{\ln x\ln y}$.

10. 1) strict crescătoare pe $(0,\infty)$; 2) strict crescătoare pe $(3,\infty)$; 3) strict crescătoare pe $(-\infty,0)$; 4) strict descrescătoare pe $(-2,\infty)$; 5) strict descrescătoare pe $(-\infty,\frac{1}{3})$; 6) strict descrescătoare pe $(0,1)$.

pag. 94

1. 1) $(1,\infty)$; 2) $(0,1)$; 3) $(-\frac{2}{3},\infty)$; 4) $(-\frac{3}{2},\infty)$; 5) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 6) $[\frac{2x+1}{3},\infty)$; 7) $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; 8) $(1,\infty)$; 9) $(1,2]$; 10) $(0,\frac{1}{5}]$.

2. 1) $g(x)>0$, $x\in(-1,0)$; $g(x)<0$, $x\in(0,\infty)$; 2) $g(x)<0$, $x\in(0,\frac{1}{27})$; $g(x)>0$, $x>\frac{1}{27}$; 3) $g(x)<0$, $x\in(0,2)-\{1\}$; $g(x)>0$, $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$; 4) $g(x)<0$, $x\in(1,2)$; $g(x)>0$, $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$; 5) $g(x)<0$, $x\in(1,\infty)$; $g(x)>0$, $x\in(-\infty,-1)$; 6) $g(x)>0$, $x\in\mathbb{R}-\{2\}$.

pag. 110

1. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) 4; 4) $\frac{7}{5}$; 5) 3; 6) $-3,1$; 7) $\frac{1}{2}$; 3; 8) $-1,4$; 9) -1; 10) -1;

2. 1) $\log_2 10$; 2) 0; 3) $\pm\sqrt{\log_3 2}$; 4) ± 1;

4. 1) 2; 2) 3; 3) 2; 4) -2; 5) 2; 6) 6; 7) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{9}{4}$, 3; 9) $\log_{1+\sqrt{3}}2$; 10) $\frac{5}{2}$; 11) $\frac{3}{2}$; 12) ± 1;

5. 1) ± 2; 2) ± 1; 3) 1; 4) ± 4; 5) ± 1.

6. 1) 1; 2) 0; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 1;

7. 1) -2; 2) $\pm\log_{\frac{3}{2}}2$; 3) 4; 4) ± 1; 5) 0; $\log_{\frac{3}{2}}3$;

8. 1) 0; 2) -1; 0; 3) 0, $\frac{1}{1-\log_2 3}$; 4) ± 1, $\pm\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) 0;

9. 1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 3; 5) 3; 6) 2; 7) 5; 8) 2; 9) 1; 10) 2;

10. 1) ± 3; 1; 2; 4; 2) $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 1; 3) ± 1; -3; 0.

11*. 1) 1; 2) $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geq 2\cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}\geq 2\cdot 2^{\sqrt{\sqrt[4]{x}\sqrt[12]{x}}}=2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$; 0; 1; 3) $\emptyset$; 4) 0; 5) 0; 2.

12. 1) $\emptyset$ dacă $m>1$; 0 dacă $m=1$, $\pm\log_{12}(1\pm\sqrt{1-m})$ dacă $m\in[0,1)$; $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-m})$ dacă $m<0$;
2) $\log_2(2m+\sqrt{4m^2-2m-2})$ dacă $m<-\frac{1}{2}$; 1 dacă $m=1$; $\log_2(2m\pm\sqrt{4m^2-2m-2})$ dacă $m>1$; $\emptyset$ în rest;
3) $\log_2 m$, $2\log_2 m$ dacă $m>0$; $2\log_2|m|$ dacă $m<0$; $\emptyset$ dacă $m=0$;

13. 1) $(5,\infty)$; 2) $(-\infty,1)$; 3) $(-\infty,\frac{1}{4})$; 4) $(-\infty,-1]$; 5) $[3,\infty)$; 6) $[\frac{2}{3},\infty)$; 7) $[4,\infty)$; 8) $[4,\infty)$; 9) $\emptyset$; 10) $(13,\infty)$;

14. 1) $(-1,\infty)$; 2) $[\log_3 2,1]$; 3) $(-\infty,-1]$; 4) $(-\infty,0)$; 5) $(0,\frac{1}{2})$; 6) $[-1,1]-\{0\}$; 7) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 8) $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; 9) $(-1,1)$;

15. 1) $(-\infty,0)\cup(\log_2 3,\infty)$; 2) $(0,\log_2\frac{4}{3}]\cup(1,\infty)$; 3) $(-\infty,-\log_5 6]\cup[-1,0)$; 4) $(2,\infty)$; 5) $[\log_5 7,2]$; 6) $(-\infty,-1)$; 7) $(2,3)\cup(4,\infty)$; 8) $(1,\infty)$; 9) $(-\infty,1]$; 10) $(-\infty,3]$; 11) $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

16. 1) $(-\infty,\log_2(-a)-1)$ dacă $a<0$; $\emptyset$ dacă $a=0$; $(-\infty,\log_2 a-2)$ dacă $a>0$; 2) $(-\infty,\log_3(-a))$ dacă $a<0$; $\emptyset$ dacă $a=0$; $(-\infty,-2+\log_3 a)$ dacă $a>0$.

17. $[1,\infty)$.

pag. 132

1. 1) 3; 2) 4; 3) $\frac{5\pm\sqrt{393}}{4}$; 4) $1+\sqrt{3}$; 5) $\emptyset$; 6) 5; 7) 6, 4; 8) 10^{10}; 9) 41.

2. 1) 3; 2) 6; 3) 2; 4) soluţie unică $x=2$; 5) $\emptyset$; 6) 1; 7) -1; 8) 3; 9) 1; 10) 37; 11) 9; 12) 14; 13) 29; 14) 3, $3+\sqrt{2}$; 15) 7, $\frac{11}{5}$.

3. 1) 64; 2) 2; 3) 16; 4) 27; 5) $\frac{1}{4}$, 4; 6) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$; 7) $\sqrt{3}$, 3; 8) 1, $\frac{1}{9}$, 3; 9) $\log_3\frac{10}{9}$, $\log_3 4$; 10) 4; 11) $\frac{1}{9}$; 12) $\frac{1}{5}$, $\sqrt{5}$; 13) 5; 14) 0; 15) 9.

4. 1) 2; 2) 2, 3; 3) 1, 2; 4) 2, 4; 5) 1, 4; 6) $\frac{1}{100}$, 100; 7) $\frac{1}{16}$, 4; 8) $\frac{1}{9}$, 3;

9) $\frac{1}{243}$, 243; 10) $\frac{1}{8}$, 64; 11) $2^{\pm\sqrt{3}}$; 12) $\frac{1}{3}$, 9; 13) 50, $\frac{1}{200}$; 14) $\frac{1}{9}$, 3; 15) $\frac{1}{25}$, 5; 16) 1, 8; 17) 2, 100.

5. 1) 3; 2) 2; 3) 9; 4) 3; 5) 1; 6) 6; 7) 0; $f(x) = f^{-1}(x)$; 8) 2; 9) 2; 10) 9; 11) $\log_2 x = t$; 2.

6. 1) $(0,1) \cup (1,\infty)$ dacă $a = 1$; $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{4}{3}}$ dacă $a > 0$, $a \neq 1$; 2) $\emptyset$ dacă $a \leq 0$; a^6 dacă $a > 0$, $a \neq 1$; 3) $\emptyset$dacă $a \leq 0$, $a = 1$; $\frac{1}{a}$, a^2 dacă $a > 0$, $a \neq 1$; 4) $\emptyset$ dacă $a \leq 0$, $a = 1$, $a = 2$; $a + 2$ dacă $a = 3$, $a \in (0,2) - \{1\}$; $a \pm 2$ dacă $a > 2$, $a \neq 3$; 5) $\log_3(1 + \sqrt{1-a})$ dacă $a \leq 0$; $\log_3(1 \pm \sqrt{1-a})$ dacă $a \in (0,1]$; $\emptyset$ în rest.

7. 1) $(\frac{5}{8}, \infty)$; 2) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; 3) $(\frac{1}{3}, 2)$; 4) $(1,2) \cup (3,4)$; 5) $(2,3)$; 6) $(4,6)$; 7) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; 8) $(-\infty, -9] \cup (3, \infty)$; 9) $[-1, 0)$; 10) $(-1,0) \cup (4,\infty)$; 11) $(2,3) \cup [5,\infty)$; 12) $(3,4) \cup (5,\infty)$; 13) $(-7,-6] \cup [1,\infty)$; 14) $(-4,-3) \cup (8,\infty)$; 15) $[2,\infty)$; 16) $(-1,1)$; 17) $[\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$; 18) $(\frac{-1-\sqrt{29}}{2}, -3) \cup (1, \frac{-1+\sqrt{29}}{2})$; 19) $(-\frac{3}{2}, -1) \cup (4,5)$; 20) $(-1,1) \cup (3,\infty)$.

8. 1) $(3,\infty)$; 2) $(2,5)$; 3) $(1,2] \cup [3,4)$; 4) $(2,4)$; 5) $[-1,4)$; 6) $(0,1)$; 7) $[3,\infty)$; 8) $(0,\infty)$; 9) $(-2,2)$; 10) $(0,2]$; 11) $(0, \frac{1}{81})$; 12) $(3,7)$; 13) $(\log_2 \frac{5}{4}, \log_2 3)$; 14) $(\log_3 28 - 3, \log_3 10)$; 14) $(\log_3 28 - 3, \log_3 10)$; 15) $(\frac{3}{5}, 1]$; 16) $(-3,-1)$; 17) $(-2,-1) \cup (1,2)$; 18) $(3,4) \cup (5,\infty)$; 19) $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$; 20) $(0,\infty) - \{1;2\}$; 21) $(0, \frac{1}{4}) \cup (2^{-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) \cup (1, 2^{\sqrt{2}})$.

9. 1) $(0, \frac{1}{16}) \cup (16,\infty)$; 2) $(0, \frac{1}{10}) \cup (10,\infty)$; 3) $(2^{-\sqrt{5}}, 2^{\sqrt{5}})$; 4) $(0, 10^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}) \cup (10^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \infty)$; 5) $[4,8)$; 6) $[\frac{1}{5}, 5]$; 7) $(\frac{1}{4}, 4) - \{1\}$; 8) $(2,3]$; 9) $(1,2)$; 10) $[1,\infty)$; 11) $(3,4]$; 12) $(\frac{2}{3}, 1)$; 13) $(0,4) \cup (64,\infty)$; 14) $(-3, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2)$; 15) $(0,1) \cup (9,\infty)$; 16) $(\frac{1}{64}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, 4)$; 17) $(\frac{1}{10}, 1) \cup (1,10)$; 18) $[\frac{3}{4}, 1)$; 19) $(-2,13)$; 20) $(2^{-15}, 2^{-9}) \cup (2^9, \infty)$.

10. 1) $3^x = a$, $3^y = b$; $(3,0)$, $(0,3)$; 2) Produsul ecuaţiilor şi câtul ecuaţiilor vor da două ecuaţii: $6^{x+y} = 6^3$, $(\frac{2}{3})^{x-y} = \frac{2}{3}$; $(2,1)$; 3) Se logaritmează ecuaţiile; $(1,1)$; $(\frac{5}{3}, (\frac{5}{3})^{\frac{3}{2}})$; 4) $(2,4)$, $(-2, \frac{1}{4})$; 5) $(-3,2)$, $(3,2)$; 6) $(3,2)$; 7) $(1,1)$, $(4,2)$; 8) (a,a), $a > 0$; 9) $2^{x+y} = a$, $3^{x-y} = b$, $a, b > 0$; $(\log_2(2\sqrt{3}), \log_2 \sqrt{3})$; 10) Ecuaţia $3^x + 4^x = 7$ are soluţia unică $x = 1$. Sistemul se reduce la sistemul $x + 2y = 1$, $2x - y = 1$; $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$; 11) Pentru prima ecuaţie se notează $(2+\sqrt{3})^{x-2y} = z > 0$ şi se obţine ecuaţia $z^2 - 4z + 1 = 0$ cu soluţiile $z_1 = 2 - \sqrt{3}$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. Revenind la substituţie rezultă $x - 2y = -1$ şi respectiv $x - 2y = 1$. Analog se procedează cu a doua ecuaţie şi rezultă $3x + y = -1$, $3x + y = 1$; $(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$, $(\frac{1}{7}, \frac{4}{7})$, $(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7})$, $(\frac{3}{7}, -\frac{2}{7})$; 12)* Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$ este strict crescătoare, deci injectivă. Prima ecuaţie a sistemului se scrie $f(x) = f(y)$ şi de aici $x = y$; $(-2,-2)$, $(2,2)$; 13)* Scăzând cele două ecuaţii rezultă $28 - 11^x = 2^y - y^3$. Ştim că $2^y \geq y^3$, $y \geq 10$, $y \in \mathbb{N}$. În acest caz $28 - 11^x \geq 0$ dă $x \in \{0,1\}$. Pentru $x = 0$, $x = 1$ nu avem valori pentru y. Luăm $y \in \{1,2,\cdots,9\}$; $(2,5)$.

11. 1) Ecuaţia a doua se reduce la $xy = 12$, $x, y > 0$; $(3,4)(4,3)$; 2) (e, e^2); 3) $(5,3)$, $(3,5)$; 4) $(3,-3)$; 5) Se logaritmează în baza 10 ambele ecuaţii; $(10,4)$, $(4,10)$; 6) $(9,7)$, $(7,9)$; 7) Pentru prima ecuaţie folosim formula $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$; $(8,2)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$; 8) Se logaritmează în baza 4 a doua ecuaţie; $(\frac{1}{64}, -2)$, $(16,3)$; 9) $(9,27)$, $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$; 10) Se logaritmează prima ecuaţie în baza 4 şi apoi se notează $\log_4 x = a$, $\log_4 y = b$, rezultând ecuaţia omogenă $b^2 + a^2 = \frac{5}{2}ab$ cu soluţiile $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; $(4,16)$; 11) $(4,4)$; 12) Se logaritmează ambele ecuaţii în baza 10; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$; 13)* Din a doua ecuaţie $y = \frac{4}{x}$. Prima ecuaţie dă $4 = \frac{2^x + 2^{\frac{4}{x}}}{2} \geq \sqrt{2^{x+\frac{4}{x}}} \geq \sqrt{2^4} = 4$, cu egalitate dacă $x = \frac{4}{x}$; $(2,2)$; 14)* Dacă (x_0, y_0), $x_0, y_0 > 0$ este soluţie a sistemului, atunci $(-x_0, -y_0)$ este de asemenea soluţie. Prima ecuaţie se aduce la forma $x^2 + \ln x = y^2 + \ln y$ (deci se caută numai soluţii $x, y > 0$. Funcţia $f(x) = x^2 + \ln x$, $x > 0$ este strict crescătoare, deci injectivă. Prima ecuaţie se scrie $f(x) = f(y)$, adică $x = y$; $(3,3)$, $(-3,-3)$; 15)* $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ este unica soluţie a sistemului. Dacă $x > \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{3}$, atunci $(\frac{1}{4})^x + (\frac{1}{27})^y < (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{27})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Deci sistemul nu admite soluţii (x,y) cu $x > \frac{1}{2}$, $y > \frac{1}{3}$. Dacă $x > \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{3}$, atunci $\log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ şi $\log_{\frac{1}{27}} y > \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, iar de aici $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{27}} y < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ şi deci prima ecuaţie a sistemului nu se verifică.
Aşadar sistemul nu are soluţii (x,y) cu $x > \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{3}$. Analog se tratează celelalte cazuri.

12. 1) $(-1,2) \cup \{0;1\}$; 2) $(-\infty, 0) \cup (\log_3 2, 1)$; 3) $\emptyset$; 4) $\emptyset$.

pag. 168

2. 1) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + k\pi$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \arccos\frac{2-\sqrt{5}}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm \arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2} + k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 9) Se scriu în funcţie de $3x$, $\cos 9x$, $\cos 6x$; $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $\pm\frac{2\pi}{9} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 10) Se aduc la argumentul $2x$; $k\pi$; $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. 1) $-\operatorname{arctg}(\frac{3}{4}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$; $-\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\operatorname{arctg} 3 + k\pi$; $\operatorname{arctg} 7 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $(-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 8) $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$; $\operatorname{arctg}(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 9) $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 10) $\operatorname{arctg} 2 + k\pi$; $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 11) $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 12) $\pm\frac{\pi}{4} + k\pi$; $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. 1) $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{\pi}{12}+(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\operatorname{arctg}2}{2}+k\pi$; 5)* Se împarte ecuaţia
:in $\sqrt{13}$ şi se observă că $(\frac{2}{\sqrt{13}})^2+(\frac{3}{\sqrt{13}})^2=1$, ceea ce arată că există
$\in(0,\frac{\pi}{2})$ astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$; 6) $2k\pi$; $\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

. 1) $\frac{k\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{k\pi}{4}$; $(2k+1)\frac{\pi}{24}$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{k\pi}{10}$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$; $\frac{\pi}{10}+$
:, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $(2k+1)\frac{\pi}{9}$; $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{k\pi}{3}$; $\frac{2k\pi}{9}$, $k\in\mathbb{Z}$.
. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $(2k+1)\frac{\pi}{16}$; $(3k\pm1)\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; 4)
$\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$; $(6k\pm1)\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$; $\pm\frac{\pi}{4}+$
π; $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$.
. 1) $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 3)
$k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{11\pi}{12}+2k\pi$; $-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 5)
$k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
. 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$;
) $(6k\pm1)\frac{\pi}{12}$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
. 1) $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{\pi}{14}+\frac{2k\pi}{7}$; $-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{48}+$
$\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{\pi}{24}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{2k\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
) $(2k+1)\frac{\pi}{8}$, $(3k\pm1)\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$; $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$;
) $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}$; $k\in\mathbb{Z}$; 9)
$\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 10) $(-1)^k\frac{\pi}{30}+\frac{k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
0. 1) $-\operatorname{arctg}(\frac{1}{3})+k\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 3)
:π; $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\operatorname{arctg}(\frac{1}{2})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $k\pi$; $\pm\frac{1}{2}\arccos(\frac{1}{4})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 7) $\emptyset$;
) $\emptyset$; 9) $\emptyset$; 10) $\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.
1. 1) $\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$; 4)
$-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{2k\pi}{15}$; $(2k+1)\frac{\pi}{17}$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $(4k+1)\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$;
') $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 8) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 9) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 10)
$\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 11) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; 12) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; 13)
:π; $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 16) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 17) $k\pi$; $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
.8) $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$; 19) $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; 20) $2k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12. 1) $m<0$, $m>4$, $x\in\emptyset$; $m=1$, $x=(-1)^k\arcsin(\frac{1}{4})+k\pi$, $k\in$
:; $m\in[0,4]$, $m\neq1$, $x=(-1)^k\arcsin(\frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 2)
$m|\leq2$, $x=-\frac{\pi}{3}+(-1)^k\arcsin(\frac{m}{2})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $m\in\mathbb{R}-[-2,2]$, $x\in\emptyset$;
3) $m\in\mathbb{R}$, $x=\operatorname{arctg}m+k\pi$; $x=\operatorname{arctg}(m-2)+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 4)
$n<-1$, $m>\frac{1}{3}$, $x\in\emptyset$; $m=-1$, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $m\in$
$(-1,\frac{1}{3}]$, $x=\operatorname{arctg}\frac{-m-1\pm\sqrt{-3m^2-2m+1}}{m+1}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $m<0$, $m>4$, $x=$

$k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $m\in[0,4]$, $x=k\pi$, $x=(-1)^k\arcsin(\frac{\sqrt{4-m}}{2})+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;
13. 1) $[0,1]$; 2) 0, 1; 3) -2; 4) 0, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0, ±1; 6) $[0,\infty)$; 7) 0, $\pm\frac{8\pi}{5}$, $\pm\frac{4\pi}{3}$;
8) $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{10\pi}{3}$; 9) $\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$; 10) soluţie unică $x=\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{2}$.
14. 1) $(k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)\cup(\frac{2\pi}{3}+k\pi,\pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $(-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi]\cup(\frac{\pi}{4}+$
$k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $[2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi]\cup[\frac{5\pi}{6}+2k\pi,2\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
4) $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\operatorname{arctg}3+k\pi)\cup(k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; 5) $[\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+$
$2k\pi]\cup[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$; 6) $[-\operatorname{arctg}(\frac{1}{4})+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$;
7) $k\pi$; $[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$; 8) $[2k\pi,\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; 9) $(\frac{\pi}{4}+$
$2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)\cup(\pi+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi)\cup(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$; 10)
$[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$; 11) $(-\frac{\pi}{3}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi)\cup(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
12) $(\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{11\pi}{6}+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

15. 1) $(\frac{\sqrt{3}}{6},1]$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $(-\infty,-\frac{1}{3}]$; 4) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$; 5) $(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$; 6) $\emptyset$; 7) $(\sqrt{3},\infty)$;
8) $(0,1]$; 9) $(-1,0)$; 10) $(-\infty,0)\cup(\operatorname{tg}1,\infty)$.

pag. 170

Teste de evaluare. Testul 1. 1. $(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow5m+1>0$ şi $\Delta_x<0$; $(3,\infty)$; **3.** a) $\frac{m+1}{m-2}>0$, $\frac{m+1}{m-2}\neq1$; pentru $m\in(2,\infty)$, f este strict crescătoare, iar pentru $m\in(-\infty,-1)$, f este strict descrescătoare; b) $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(2^x+1)$; **4.** a) 0; b) 1; **5.** a) $(3,\infty)$; b) $(5,\infty)$; **6.** a) $(1,2)$; $x>1$ şi $y\geq1$ sau $x\geq1$ şi $y\geq2\Rightarrow2^x+3^y>11$; $x<1$ şi $y\geq2$ sau $x\leq1$ şi $y>2\Rightarrow5^x-2^y<1$, etc; b) $(2,2),(4,\sqrt{2})$; **7.** $(4,13)$; **8.** $\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; **9.** b) $(-\infty,-6]\cup(-2,\infty)$; **10.** c); **11.** e); **12.** a). **Testul 2. 1.** a) $x(x-1)\geq0$; $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$; b) $x^2-x-2>0$, $x^2-x-2\neq1$, $9-x^2\in\mathbb{N}$, $9-x^2\geq2$; -2; **3.** $2^{-x}=y>0$; $(m+1>0$ şi $\Delta<0)$ sau $(m+1>0$, $\Delta\geq0$ şi $y_1,y_2<0)$; **5.** a) 2; b) 16; **6.** a) $(-\infty,1)$; b) $(0,\frac{2}{7})$; **7.** a) $(1,0)$; b) $(4,2)$; **8.** $(-\infty,-1-\sqrt{2}]\cup[1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2},\infty)$; **9.** a) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $\frac{1}{2}$; **10.** ±4; **11.** $(a^{\frac{12}{5}},3)$; **12.** d). **Testul 3. 1.** a) $x+1\geq0$, $x^2-3x+2\neq0$; $[-1,\infty)-\{1,2\}$; b) $(5,6)$; **3.** $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$, $x_1\neq x_2\Rightarrow2^{x_1}\neq2^{x_2}$; $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $x_1\neq x_2\Rightarrow4^{x_1}\neq4^{x_2}$; $x_1\in\mathbb{Q}$, $x_2\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\Rightarrow2^{x_1}\neq4^{x_2}$; $1<\sqrt{2}<2\Rightarrow f(1)=2<f(\sqrt{2})=4^{\sqrt{2}}>f(2)=2^2$; **4.** a) ±1; **5.** a) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; b) $(0,\frac{1}{\sqrt{7}})\cup(1,49)$; **6.** a) $(3,1)$; b) $(2,4),(1,1)$; **7.** a) $2\operatorname{arctg}2+2k\pi$, $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; b) $\sin x=a$, $\cos x=b$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; c) $[0,1]$; **8.** a) 2; b) $(0,1]\cup[3,\infty)$; **9.** e); **10.** a).

II. PROGRESII

NOŢIUNEA DE ŞIR DE NUMERE

În limbajul uzual prin şir de numere înţelegem o mulţime de numere aranjate într-o ordine anumită. Elementele unui şir de numere se numesc **termenii şirului.** Primul termen este notat prin s_1, al doilea prin $s_2, \cdots$, al n-lea termen prin s_n, etc..

De exemplu şirul numerelor naturale nenule este: $1, 2, \cdots, n, \cdots$ unde primul termen este $a_1 = 1$, al doilea termen este $a_2 = 2, \cdots$, al n-lea termen este $a_n = n$, etc.

Şirul inverselor numerelor naturale nenule este: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ cu $b_1 = \frac{1}{1}$, $b_2 = \frac{1}{2}, \cdots, b_n = \frac{1}{n}, \cdots$.

Conceptul de şir poate fi introdus cu ajutorul conceptului de funcţie. Mai precis are loc următoarea:

Definiţie. Se numeşte şir de numere reale orice funcţie $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, unde A este o **submulţime finită** a lui $\mathbb{N}$.

Exemple

1) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \sqrt{n^2 - 4}$, $A = \{0, 1\}$.

2) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \sqrt{n^2 - 1}$, $A = \{0\}$.

3) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = \frac{1}{1+(-1)^n}$, $A = \{n \in \mathbb{N} | \ n = \text{impar}\}$.

Această funcţie nu este şir deoarece A este infinită.

4) $x : \mathbb{N} - A \to \mathbb{R}$, $x(n) = n^2 + 3n$, $A = \emptyset$.

Vom presupune în general că $A = \emptyset$. Fie deci $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Numărul $x(n)$ se notează în general prin x_n şi se numeşte **termenul de rang n al şirului** x.

Vom nota şirul x prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sau simplu (x_n).

Exemple de şiruri

1) (a_n) : $0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots$ (şirul **constant** 0; are toţi termenii egali cu zero);

2) (b_n) : $1, -1, 1, -1, \cdots$, (şirul **alternant**);

3) (c_n) : $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots$ (şirul rădăcinilor pătrate ale numerelor naturale nenule).

Definiţie. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se **numeşte mărginit** dacă există două numere reale m, M astfel încât $m \leq x_n \leq M$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin termenul general $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ este mărginit deoarece $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ (aici $m = 0$, $M = 1$).

Definiţie. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **strict crescător (strict descrescător)** dacă $x_n < x_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ $(x_n > x_{n+1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N})$

Observaţii. 1) Un şir (x_n) care este strict crescător sau strict descrescător se numeşte **şir strict monoton.**

2) Pentru a studia monotonia unui şir (x_n) se calculează diferenţa a doi termeni consecutivi $x_{n+1} - x_n$ şi se compară cu zero.

Exemplu. Fie şirul (x_n) de mai sus, cu $x_n = \frac{n}{n+1}$. Pentru a preciza monotonia şirului (x_n) se calculează diferenţa

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, \ (\forall) n \in \mathbb{N}$$

ceea ce arată că $x_{n+1} - x_n > 0$ sau $x_{n+1} > x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, adică şirul este strict crescător.

Moduri de a defini un şir

Există mai multe posibilităţi de a descrie un şir.

1) Printr-o regulă de calcul

În această situaţie se precizează o exprimare analitică pentru termenul de rang n, a_n, care permite calcularea oricărui termen al şirului.

Exemple. 1) Dacă şirul (a_n) este dat prin $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 0$, atunci se poate calcula orice termen din şir. De exemplu: $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$, $a_{101} = \frac{101}{101+1} = \frac{101}{102}$, etc.

2) Dacă (b_n) este şirul dat prin termenul general $b_n = \sqrt[3]{n^2 + 1}$, $n \geq 0$, atunci $b_2 = \sqrt[3]{2^2 + 1} = \sqrt[3]{5}$, $b_9 = \sqrt[3]{9^2 + 1} = \sqrt[3]{82}$, $\cdots$.

2) Prin mai multe reguli de calcul

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \begin{cases} n - 1, & n \text{ impar} \\ n^2 + 1, & n \text{ par.} \end{cases}$

Avem: $x_1 = 1 - 1 = 0$ $(n = 1$, impar), $x_2 = 2^2 + 1 = 5$ $(n = 2$, par), $x_3 = 3 - 1 = 2$ $(n = 3$, impar).

3) Printr-o relaţie de recurenţă

În acest caz un termen al şirului se exprimă în funcţie de unul sau mai

mulţi termeni precedenţi. Pentru a determina bine elementele şirului trebuie precizaţi unul sau mai mulţi termeni.

Exemple. 1) $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \geq 0$.
Observăm că această relaţie se poate scrie şi sub forma $a_{n+1} - a_n = 3$, $n \geq 0$, adică diferenţa a oricăror doi termeni consecutivi din şir este constantă.

2) $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_0 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$, $n \geq 0$.
În acest caz câtul a oricăror doi termeni consecutivi ai şirului $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, este constant.

3) $(c_n)_{n\geq 0}$, $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$, $(\forall)\, n \geq 0$. Un termen al şirului începând cu al treilea este egal cu suma precedenţilor doi.
Determinarea oricărui termen se face din aproape în aproape: $c_2 = c_1 + c_0 = 1+1 = 2$, $c_3 = c_2 + c_1 = 2+1 = 3$, $c_4 = c_3 + c_2 = 3+2 = 5$, etc.
În continuare vom examina două şiruri remarcabile definite printr-o relaţie de recurenţă.

2.1. PROGRESIA ARITMETICĂ

Şirul $1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$ reprezintă şirul numerelor naturale nenule şi are proprietatea că diferenţa a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este egală cu unu ($2-1 = 3-2 = \cdots = n+1-n = \cdots = 1$). Altfel spus în acest şir fiecare termen (începând cu al doilea) se obţine din precedentul prin adăugarea unităţii ($2 = 1+1$, $3 = 2+1, \cdots, n+1 = n+1, \cdots$).
De asemenea şirurile:

$(2n)$: $2, 4, 6, \cdots, 2n, 2n+2, \cdots$ $(n \geq 1)$

$(2n+1)$: $1, 3, 5, \cdots, 2n+1, 2n+3, \cdots$ $(n \geq 0)$

au calitatea că diferenţa a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este constantă egală cu doi ($4-2 = 6-4 = \cdots = 2n+2-2n = \cdots = 2$; $3-1 = 5-3 = \cdots = 2n+3-(2n+1) = \cdots = 2$).
De asemenea şirul: $1, -1, -3, -5, \cdots, 1-2n, \cdots$ $(n \geq 0)$
are proprietatea că diferenţa oricăror doi termeni consecutivi, începând cu al doilea este aceeaşi egală cu (-2).
Astfel de şiruri le vom numi progresii aritmetice.
Mai precis are loc următoarea:

Definiţie. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul prin adăugarea aceluiaşi număr r se numeşte **progresie aritmetică**.
Numărul r se numeşte **raţia progresiei**.

Deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică dacă avem relaţia de recurenţă $a_n = a_{n-1} + r$, $n \geq 2$.

Aaşadar **pentru a proba că şirul (a_n) este progresie aritmetică** trebuie arătat că diferenţa a doi termeni consecutivi a_{n-1}, a_n este constantă

$$a_n - a_{n-1} = \text{constant}, \ (\forall)\, n \geq 2$$

Să observăm că dacă se cunosc **primul termen** a_1 şi **raţia** r pentru progresia aritmetică, atunci aceasta este bine determinată, în sensul că se pot determina toţi termenii acesteia: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$, etc.
Deci în rezolvarea problemelor cu progresii aritmetice acest fapt este foarte important deoarece se exprimă datele problemei în funcţie de a_1 şi r.
În concluzie:
orice problemă cu progresie aritmetică poate fi reformulată cu ajutorul lui a_1 şi r.

Notaţie. Faptul că şirul (a_n) este o progresie aritmetică se marchează prin: $\div a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$
Se spune că numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ **sunt în progresie aritmetică** dacă sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Problemă rezolvată

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = 7n - 12$, $n \geq 1$.
a) Să se stabilească dacă şirul dat este o progresie aritmetică şi apoi să se calculeze primii cinci termeni.
b) Stabiliţi care din numerele de mai jos este termen al şirului (a_n) : 13.988; 235; 688.

R. a) Pentru a preciza dacă şirul este progresie aritmetică calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi oarecare a_n, a_{n-1} şi avem:
$a_n - a_{n-1} = 7n - 12 - [7(n-1) - 12] = 7 = \text{constant}$, $(\forall)\, n \geq 2$.
Cum această diferenţă este constantă, egală cu 7, ea reprezintă raţia progresiei aritmetice. Deci $r = 7$. Primul termen este $a_1 = -5$.

Avem: $a_1 = -5$, $a_2 = 2$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, $a_5 = 23$.

b) Un număr A este termen al şirului (a_n) dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_n = A$. A-l determina pe n înseamnă să rezolvăm ecuaţia $a_n = A$. Numărul natural n (dacă există) reprezintă rangul termenului din şir care este egal cu A.

Pentru $A = 13.988$ avem ecuaţia $7n - 12 = 13988$ cu soluţia $n = 2000$. Deci numărul $A = 13988$ este termenul a_{2000}.

Pentru $A = 232$ se obţine ecuaţia $7n - 12 = 235$ cu soluţia $n = \frac{247}{7}$ care însă nu este număr natural. Deci nu există termen al şirului care să fie egal cu 235.

În fine, pentru $A = 688$, ecuaţia $7n - 12 = 688$ are soluţia $n = 100$. Prin urmare numărul $A = 688$ este termen al şirului şi anume a_{100}.

Proprietăţile progresiei aritmetice

A1 (Monotonia). Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir:

- **strict crescător**, dacă raţia $r > 0$;
- **strict descrescător**, dacă raţia $r < 0$.

Demonstraţie. Din $a_{n+1} - a_n = r$, $n \geq 1$ se deduce imediat proprietatea. ■

A2 (Formula termenului general). Dacă şirul (a_n) este o progresie aritmetică având primul termen a_1 şi raţia r, atunci termenul general a_n are forma

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \ (\forall) n \geq 1.$$

Demonstraţie. Se face prin inducţie matematică. ■

Să observăm că termenul general l-am exprimat în funcţie de a_1 şi r, cele două elemente care definesc bine o progresie aritmetică.

Următoarea proprietate dă o caracterizare a progresiei aritmetice.

A3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este medie aritmetică a termenilor vecini lui, adică dacă

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ (\forall) n \geq 2.$$

Demonstraţie. Dacă şirul (a_n) este progresie aritmetică de raţie r, atunci $a_n = a_{n-1} + r$, $a_n = a_{n+1} - r$. Adunând aceste relaţii, membru cu membru, rezultă $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

Reciproc, din relaţia $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ scrisă sub forma $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ sau $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, $n \geq 2$, se deduce că diferenţa a doi termeni consecutivi ai şirului (a_n) este aceeaşi, ceea ce arată că şirul (a_n) este progresie aritmetică. ■

Observaţii. 1) Are loc relaţia ceva mai generală,

$$a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}, \ 1 \leq k < n$$

care arată că un termen al progresiei, începând cu al doilea, este media aritmetică a oricăror doi termeni egal depărtaţi de el şi reciproc.

2) Cu această proprietate se poate scrie faptul că numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică (dacă sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice) dacă şi numai dacă: $2b = a + c$ (Altfel aceste numere se pot lua de forma: $b - r, b, b + r$).

Pentru ca patru numere a, b, c, d să fie în progresie aritmetică (dacă sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice) avem condiţia echivalentă: $2b = a + c$, $2c = b + d$.

Uneori în aplicaţii este util a lua cele patru numere în progresie aritmetică de forma: $x_0 - 3r$, $x_0 - r$, $x_0 + r$, $x_0 + 3r$, când raţia este $2r$.

Probleme rezolvate

1. Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie r este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementul cerut.

a) $a_1 = 3$, $r = 2$. Calculaţi a_{15}; b) $a_{20} = 55$, $r = 3$. Calculaţi a_1;

c) $a_1 = -2$, $a_{25} = 22$. Calculaţi r; d) $a_1 = 3$, $a_3 = 7$. Calculaţi a_{10};

e) $a_4 = 10$, $a_7 = 19$. Calculaţi a_1, r;

f) $a_1 + a_7 = 42$, $a_{10} - a_3 = 21$. Calculaţi a_1, r.

R. a) Formula termenului general este: $a_n = a_1 + (n-1)r$. Pentru $n = 15$ avem: $a_{15} = a_1 + 14r = 3 + 14 \cdot 2 = 31$.

b) Din $a_{20} = a_1 + 19r = 55$ deducem $a_1 = 55 - 19r = 55 - 57 = -2$.

c) Din $a_{25} = a_1 + 24r = 22$ se obţine $24r = 24$ şi deci $r = 1$.

d) Avem: $a_3 = a_1 + 2r = 7$, iar de aici $r = 2$. Acum $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 2 = 21$.

e) Avem sistemul: $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3r = 10 \\ a_7 = a_1 + 6r = 19 \end{cases}$ cu soluţia $a_1 = 1$, $r = 3$.

f) Se scriu cele două relaţii în funcţie de a_1 şi r şi avem sistemul:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + 6r) = 42 \\ a_1 + 9r - (a_1 + 2r) = 21 \end{cases}$$ cu soluţia $a_1 = 12$, $r = 3$.

2. Să se arate că dacă numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $A_1 = a^2 - bc,\ A_2 = b^2 - ca,\ A_3 = c^2 - ab$ sunt de asemenea în progresie aritmetică.

R. Faptul că a, b, c sunt în progresie aritmetică îl exprimăm prin $2b = a+c$. A afirma că numerele A_1, A_2, A_3 sunt în progresie aritmetică revine la a arăta că
$2A_2 = A_1 + A_3$ sau $2b^2 - 2ac = (a^2 - bc) + (c^2 - ab)$ sau
$b(2b+a+c) = (a+c)^2$ sau $2b(a+c) = (a+c)^2$, evident dacă ţinem seama de condiţia $2b = a + c$.

3. Dacă numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sunt în progresie aritmetică, să se calculeze sumele:

$$S_1 = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n},$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}},\ n \geq 3$$

în funcţie de a_1, r şi n.

R. Ideea este de a scrie un termen oarecare al fiecărei sume ca diferenţă de doi termeni de acelaşi tip. Pentru prima sumă avem:
$\frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{1}{r}(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}),\ k \geq 2$, ceea ce uşor se poate constata.
Atunci $S_1 = \frac{1}{r}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{r}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}) =$
$= \frac{1}{r}\frac{(n-1)r}{a_1[a_1+(n-1)r]} = \frac{n-1}{a_1[a_1+(n-1)r]}$.
Pentru a doua sumă, termenul general este (se raţionalizează):

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}} = \frac{1}{r}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}}),\ k \geq 2.$$

Deci: $S_2 = \frac{1}{r}(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) =$
$= \frac{1}{r}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{r}(\sqrt{a_1 + (n-1)r} - \sqrt{a_1})$.

4. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$, o progresie aritmetică. Definim şirul $(v_n)_{n\geq 1}$ prin $v_n = -3u_n + 2$. Să se arate că şirul (v_n) este de asemenea o progresie aritmetică. Studiaţi monotonia şirului (v_n).

R. Fie r raţia progresiei aritmetice (u_n). Pentru a proba că (v_n) este de asemenea o progresie aritmetică calculăm
$v_{n+1} - v_n = -3u_{n+1} + 2 - (-3u_n + 2) = -3(u_{n+1} - u_n) = -3r$ =constant.
Prin urmare şirul (v_n) este de asemenea o progresie aritmetică de raţie $R = -3r$. Din $v_{n+1} - v_n = -3r$ deducem monotonia şirului (v_n). Dacă (u_n) este strict crescător (adică dacă $r > 0$), atunci şirul (v_n) este strict descrescător. Dacă (u_n) este strict descrescător ($r < 0$), atunci (v_n) este strict crescător. Deci cele două şiruri au monotonii diferite.

5. Să se arate că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

R. Presupunem, prin absurd, că aceste numere sunt termenii (nu neapărat consecutivi) unei progresii aritmetice. Fie deci $a_m = \sqrt{2},\ a_n = \sqrt{3}, a_p = \sqrt{5}$ şi să admitem că m, n, p sunt diferite între ele. Atunci: $a_m = a_1 + (m-1)r = \sqrt{2},\ a_n = a_1 + (n-1)r = \sqrt{3},\ a_p = a_1 + (p-1)r = \sqrt{5},\ r \neq 0$.
De aici: $a_m - a_n = (m-n)r = \sqrt{2} - \sqrt{3},\ a_n - a_p = (n-p)r = \sqrt{3} - \sqrt{5}$.
Împărţind, membru cu membru, aceste relaţii rezultă: $\frac{m-n}{n-p} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.
Cum membrul stâng este raţional îl notăm cu $q \in \mathbb{Q}$. Deci $q = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ sau $\sqrt{3}(q+1) = \sqrt{5}q + \sqrt{2}$, care prin ridicare la pătrat devine $\sqrt{10} = \frac{-2q^2+6q+1}{2q}$, ceea ce-i absurd deoarece membrul stâng este iraţional, iar membrul drept este raţional. În concluzie $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

6. Un mobil se deplasează uniform pe axa Ox cu viteza $v = 3$ m/s. Dacă $s(t)$ reprezintă spaţiul parcurs până la momentul t, iar $s(0) = 5$ m, atunci să se arate că $(s(t))_{t\geq 1}$ reprezintă o progresie aritmetică (distanţele parcurse la momentele $t = 1, 2, 3, \cdots$).

R. Se ştie că legea de mişcare a punctului în acest caz este:
$s(t) = s(0) + vt = 5 + 3t$.
Deci $s(n) = 3n + 5$. Cum $s(n+1) - s(n) = 3,\ (\forall)\, n \geq 1$ rezultă afirmaţia.

7. Coborând în interiorul Pământului, la fiecare 30,5 m temperatura creşte cu 1°C. Dacă la suprafaţa Pământului temperatura este de 10°C, atunci:
a) Ce temperatură va fi la adâncimea de 1098m ?
b) La ce adâncime temperatura atinge punctul de fierbere al apei ?

R. a) Dacă notăm $T(n)$ temperatura la adâncimea de n metri, atunci aceasta are ecuaţia: $T(n) = 10 + \frac{n}{30,5}$.
Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci din $T(n+1) - T(n) = \frac{1}{30,5}$ rezultă că şirul $(T(n))_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.
În particular pentru $n = 1098$ găsim $T_{1098} = 10 + 36 = 46$°C.

b) Temperatura de fierbere a apei este $T = 100$°C.
Din $100 = 10 + \frac{n}{30,5}$ rezultă $n = 2745$ m.

A4. Dacă numerele $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ sunt în progresie aritmetică, atunci: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_k + a_{n-k+1},\ (\forall)\, k = \overline{1,n}$

Suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme $(a_k + a_{n-k+1})$ este egală cu suma numerelor extreme $(a_1 + a_n)$.

Demonstraţie. Se scriu toţi termenii în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r.
Avem: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)r + a_1 + (n-k)r = 2a_1 + (n-1)r$ şi
$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$,
ceea ce probează afirmaţia. ■

A5 (Suma primilor n termeni). Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, atunci:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n,\ n \geq 1.$$

Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu produsul dintre semisuma termenilor extremi şi numărul termenilor sumei.

Demonstraţie. Scriem de două ori suma S_n,
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$
şi prin adunare avem:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)$.
Ţinând seama de A4, fiecare paranteză din dreapta este egală cu $a_1 + a_n$.
Deci $2S_n = n(a_1 + a_n)$, adică $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$. ■

Observaţii. 1) Suma S_n se poate exprima în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r astfel: $S_n = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2}$.

2) Să observăm că termenul general a_n se poate exprima cu ajutorul sumelor S_n. Mai precis

$$a_n = S_n - S_{n-1},\ (\forall)\, n \geq 2$$

Într-adevăr din $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ şi $S_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ prin scădere rezultă relaţia dorită.

Probleme rezolvate

1. Progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie r este definită prin anumite elemente date. Determinaţi, în fiecare din cazuri, elementele cerute.
a) $a_1 = -3$, $r = 3$. Calculaţi a_{10} şi S_{10};
b) $a_1 = 116$, $a_8 = 137$. Calculaţi r şi S_8;
c) $a_1 = 12$, $a_n = -44$, $S_n = -240$. Calculaţi r şi n;
d) $a_{36} = 2$, $S_{36} = 324$. Calculaţi a_1 şi r;
e) $a_1 = 17$, $r = 6$, $S_n = 369$. Calculaţi n şi a_n;
f) $a_n = 290$, $S_n = 3900$, $r = 10$. Calculaţi a_1 şi n;
g) $a_1 + a_8 + a_{12} + a_{19} = 224$. Calculaţi S_{19};
h) $S_m = S_n$, $m \neq n$. Calculaţi S_{m+n}.

R. a) Avem: $a_{10} = a_1 + 9r = -3 + 9 \cdot 3 = 24$ şi $S_{10} = \frac{a_1+a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{210}{2} = 105$.

b) Din $a_8 = a_1 + 7r = 137$, deducem $r = 3$. Pentru S_8 avem:
$S_8 = \frac{a_1+a_8}{2} \cdot 8 = 1012$.

c) Din $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = -240$ rezultă $n = 15$, iar din $a_{15} = a_1 + 14r = -44$ se obţine $r = -4$.

d) Avem sistemul (se scriu elementele în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r): $\begin{cases} a_1 + 35r = 2 \\ \frac{(2a_1+35r)36}{2} = 324 \end{cases}$ cu soluţia $a_1 = 16$, $r = -\frac{2}{5}$.

e) Din $S_n = \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2} = 369$ rezultă ecuaţia $3n^2 + 14n - 369 = 0$ cu soluţia $n = 9$. Acum $a_9 = a_1 + 8r = 65$.

f) Avem sistemul:
$\begin{cases} a_1 + (n-1)r = 290 \\ \frac{[2a_1+(n-1)r]n}{2} = 3900 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a_1 + 10(n-1) = 290 \\ \frac{(a_1+290)n}{2} = 3900 \end{cases}$
cu soluţiile $(n_1 = 39,\ a_1 = -90)$, $(n_2 = 20,\ a_1 = 100)$.

g) Avem: $S_{19} = \frac{a_1+a_{19}}{2} \cdot 19$. Cum $a_1 + a_{19} = a_8 + a_{12}$, ipoteza dă $2(a_1 + a_{19}) = 224$, adică $a_1 + a_{19} = 112$. Acum $S_{19} = \frac{112 \cdot 9}{2} = 1064$.

h) Din $S_m = S_n$ se deduce
$\frac{2a_1+(m-1)r}{2} \cdot m = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$, iar de aici ($m \neq n$) după unele calcule
$2a_1 + (m+n-1)r = 0$.
Acum $S_{m+n} = \frac{2a_1+(m+n-1)r}{2}(m+n) = 0$.

2. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + n$, $n \geq 1$ dacă $x_1 = 0$ şi stabiliţi dacă şirul este monoton.

R. Din relaţia de definire a şirului rezultă $x_{n+1} - x_n = n > 0$, adică $x_{n+1} > x_n$, ceea ce arată că şirul este strict crescător.
Pentru a determina expresia termenului general x_n vom scrie relaţia de recurenţă pentru $n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ când avem:
$x_n = x_{n-1} + n - 1$
$x_{n-1} = x_{n-2} + n - 2$
.....
$x_3 = x_2 + 2$

$x_2 = x_1 + 1$.
Adunate, membru cu membru, aceste relaţii dau
$x_n = x_1 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1)$.
Suma $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ reprezintă suma a $(n-1)$ termeni în progresie aritmetică de raţie 1 şi primul termen egal cu 1. Găsim că valoarea ei este $\frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Deci $x_n = \frac{(n-1)n}{2}$.

3. Dacă $S_n = 4n^2 - 3n$ reprezintă suma primilor n termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ atunci: a) să se determine a_n;
b) să se arate că şirul (a_n) este o progresie aritmetică.
R. a) Din relaţia $a_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 2$ rezultă:
$a_n = 4n^2 - 3n - [4(n-1)^2 - 3(n-1)] = 8n - 7$, $a_1 = S_1 = 1$.
b) Calculăm diferenţa a doi termeni consecutivi
$a_{n+1} - a_n = 8(n+1) - 7 - (8n - 7) = 8$, $n \geq 1$,
şi constatăm că $r = 8$ reprezintă raţia progresiei în care $a_1 = 1$.

Observaţie. S-ar fi putut calcula a_1 şi r din $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 10$. De aici $a_2 = 9$ şi deci $r = 8$. Se verifică uşor că pentru $a_1 = 1$ şi $r = 8$ suma $S_n = 4n^2 - 3n$ reprezintă suma primilor n termeni ai acestei progresii aritmetice.

4. Să se rezolve ecuaţia: $2 + 5 + 8 + \cdots + x = 155$.
R. Să observăm că termenii sumei sunt în progresie aritmetică de raţie $r = 3$ $(5 - 2 = 8 - 5 = \cdots = 3)$. Notăm $x = a_n$. Atunci suma din stânga egalităţii devine: $\frac{[2\cdot 2 + (n-1)3]n}{2} = 155$.
Rezolvând această ecuaţie găsim $n = 10$ şi deci $x = a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$.

5. Unghiurile interioare succesive ale unui poligon formează o progresie aritmetică, având primul termen $120°$ şi raţia $5°$. Câte laturi are poligonul ?
R. Notând cu n numărul de laturi avem: $a_n = 120° + 5°(n-1)$ şi reprezintă măsura celui de-al n-lea unghi.
Suma unghiurilor poligonului este $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, (1).
Pe de altă parte $S_n = 180°(n-2)$, (2). Egalând (1) cu (2) rezultă ecuaţia $n^2 - 25n + 144 = 0$ cu soluţia corectă $n = 9$.

6. Calculaţi suma primelor n numere naturale impare.
R. Avem de calculat $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$. Cum termenii sumei sunt în progresie aritmetică de raţie $r = 2$, avem: $S_n = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$.

7. Din numerele naturale impare se formează grupe: $(1), (3,5), (7,9,11), \cdots$, astfel încât a n-a grupă conţine n numere. Calculaţi suma numerelor din a n-a grupă.
R. Problema este de a determina primul element al grupei a n-a. Numărul de numere situate în celelalte $(n-1)$ grupe ce preced a n-a grupă este: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Deci primul număr din grupa a n-a este (numărul $k+1$ din şirul dat este $a_k = 2k + 1$) : $a_{\frac{n(n-1)}{2}+1} = \frac{2(n-1)n}{2} + 1 = n^2 - n + 1$.
Găsim uşor $S_n = n^3$.

8. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ şi $a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2$, $k \geq 2$. Să se determine termenul general a_n.
R. Se aduce relaţia de recurenţă la forma:
$a_{k+1} - a_k = (a_k - a_{k-1}) + 2$
şi se notează $a_k - a_{k-1} = y_k$ când avem relaţia $y_{k+1} = y_k + 2$, $k \geq 2$, $y_2 = a_2 - a_1 = 3$. Această ultimă relaţie spune că (y_n) este progresie aritmetică de raţie $r = 2$ şi primul termen $y_2 = 3$.
Atunci $y_n = 3 + 2(n-2) = 2n - 1$.
Revenim la substituţie pentru care au loc relaţiile:
$a_n - a_{n-1} = y_n = 2n - 1$
$a_{n-1} - a_{n-2} = y_{n-1} = 2n - 3$
.....
$a_2 - a_1 = y_2 = 3$.
Adunând aceste relaţii rezultă
$a_n - 1 = 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$ sau
$a_n = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$,
ultima sumă este formată din n termeni în progresie aritmetică de raţie 2.

2.2. PROGRESIA GEOMETRICĂ

Să analizăm şirurile de numere:
$1, 3, 9, 27, \cdots$ (1)
$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ (2)
$-2, -6, -18, \cdots$ (3)
$-3, 6, -12, 24, \cdots$ (4).
Pentru şirul (1) observăm că fiecare termen, **începând cu al doilea**, se obţine din precedentul înmulţit cu 3. De asemenea vedem că termenii sunt dispuşi în ordine crescătoare: $1 < 3 < 9 < 27 < \cdots$.
Pentru şirul (2) funcţionează o regulă asemănătoare: orice termen, **începând cu al doilea**, este egal cu precedentul înmulţit cu numărul $\frac{1}{2}$. Termenii sunt aranjaţi, în acest caz, în ordine descrescătoare: $2 > 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \cdots$.
Cel de-al treilea şir (3) are termenii structuraţi după o regulă asemănătoare celorlalte şiruri de mai sus: orice termen, **începând cu al doilea**, se

obţine din precedentul înmulţit cu 3. Termenii şirului sunt dispuşi descrescător: $-2 > -6 > -18 > \cdots$.
În fine pentru şirul (4), orice termen, **începând cu al doilea**, se obţine din precedentul înmulţit cu (-2). Termenii alternează în sensul că unul este negativ, următorul este pozitiv, etc.
Regula constatată mai sus se poate reformula astfel: **câtul a doi termeni consecutivi, începând cu al doilea, este constant** (pentru şirul (1) acest raport este 3, pentru (2) este $\frac{1}{2}$, pentru (3) este 3, iar pentru (4) este (-2)).
Sirurile cu această proprietate se numesc progresii geometrice.
Mai precis, avem următoarea:

Definiţie. Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 \neq 0$ (primul termen) pentru care fiecare termen al său, începând cu al doilea, se obţine din precedentul prin înmulţirea cu acelaşi număr $q \neq 0$ se numeşte **progresie geometrică**. Numărul q se numeşte **raţia** progresiei.

Deci $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă avem relaţia de recurenţă: $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $n \geq 2$

Aşadar pentru a proba că şirul (b_n) este o progresie geometrică trebuie arătat că raportul a doi termeni consecutivi b_{n-1}, b_n este constant:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \text{constant}, \ (\forall) n \geq 2$$

Ca şi în cazul progresiei aritmetice, **primul termen** b_1 şi **raţia** q determină bine progresia geometrică în sensul că se pot determina toţi termenii acesteia: $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q = b_1 q^2$, etc.
În concluzie: **orice problemă cu progresie geometrică poate fi reformulată cu ajutorul lui** b_1 **şi** q.
Notaţie. Faptul că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$, este o progresie geometrică se marchează uneori prin: $\div\div\ b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$.
Se spune că numerele $b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n$ **sunt în progresie geometrică** dacă sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

Problemă rezolvată

Fie şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $b_n = 3 \cdot 2^n$, $n \geq 1$.
a) Să se stabilească dacă şirul dat este o progresie geometrică, calculând apoi primii cinci termeni.
b) Stabiliţi care din numerele de mai jos este termen al progresiei: 24; 96; 123.
R. a) Pentru a vedea dacă şirul este o progresie geometrică se calculează raportul a doi termeni consecutivi
$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 2^n} = 2$, $(\forall) n \geq 1$.
Cum acest raport este constant (nu depinde de rangul n) deducem că şirul este o progresie geometrică de raţie $q = 2$ având primul termen $b_1 = 6$. Avem $b_2 = 12$, $b_3 = 24$, $b_4 = 48$, $b_5 = 96$.
b) A stabili dacă un număr B este un termen al şirului revine la a determina rangul $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $b_n = B$.
Pentru $B = 24$, din $3 \cdot 2^n = 24$ rezultă $2^n = 8$, adică $n = 3$. Aşadar $b_3 = 24$. Dacă $B = 96$, atunci din $3 \cdot 2^n = 96$ rezultă $2^n = 32$, adică $n = 5$. Deci $b_5 = 96$. În fine, pentru $B = 123$ din $3 \cdot 2^n = 123$ rezultă $2^n = 41$. Cum această ecuaţie nu are soluţie în $\mathbb{N}^*$ deducem că 123 nu este termen al şirului.

Proprietăţile progresiei geometrice

G1 (Monotonia). Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de raţie q. Dacă:
- $b_1 > 0$ şi $q > 1$, atunci (b_n) este **strict crescător**: $b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < \cdots$;
- $b_1 > 0$ şi $q \in (0,1)$, atunci (b_n) este **strict descrescător**: $b_1 > b_2 > \cdots > b_n > b_{n+1} < \cdots$;
- $b_1 < 0$ şi $q > 1$, atunci (b_n) este **strict descrescător**;
- $b_1 < 0$ şi $q \in (0,1)$, atunci (b_n) este **strict crescător**.

Demonstraţie. Din $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \geq 1$ şi informaţiile despre b_1 şi q conduc la concluziile din proprietate. ■

G2 (Formula termenului general). Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie q, atunci termenul general b_n, are forma
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \ (\forall) n \geq 1$$

Demonstraţie. Se procedează prin inducţie matematică. ■
Trebuie observat că în această formulă un termen oarecare al progresiei se exprimă în funcţie de primul termen b_1 şi de raţia q, cele două elemente care definesc în întregime o progresie geometrică.